[Visu-M2IM] TP 7 : Modélisation d'un liquide

Vincent Feuvrier (vincent.feuvrier@normalesup.org)

On se propose d'implémenter le comportement d'un liquide dans un conteneur carré. On va faire les approximations suivantes :

- le liquide est incompressible : le volume d'une masse donnée de liquide est la même quelque que soit la forme qu'il prend ;
- la surface du liquide peut être représentée par une grille carrée de taille $N \times N$ contenant la hauteur de la surface par rapport au fond du conteneur, dans un ensemble de petites colonnes à base carrée. Cette approximation est valide tant que le conteneur est assez profond et que les forces appliquées sur le liquides sont faibles (le liquide ne peut pas gicler et les vagues ne peuvent pas s'effondrer) ;
- la composante verticale de la vitesse du liquide peut être ignorée ;
- la vitesse horizontale du liquide dans une colonne est approximativement constante.

Ces approximations vont permettre de simplifier les équations de la mécanique des fluides. Pour simplifier l'écriture on va les écrire avec une seule variable spatiale, le cas bidimensionnel sera obtenu en généralisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du(x,t)}{dt} + u(x,t)\dfrac{du(x,t)}{dx} + g\dfrac{dh(x,t)}{dx} = 0 \\ \dfrac{dp(x,t)}{dt} + \dfrac{d(u(x,t)p(x,t))}{dx} = 0 \ . \end{array} \right.$$

Ici on a utilisé les notations suivantes :

- g est la gravitation ;
- $h(x,t)$ est la hauteur de la surface du liquide ;
- $b(x)$ est la hauteur du fond du conteneur ;
- $p(x,t) = h(x,t) - b(x)$ est la profondeur du liquide ;
- $u(x,t)$ est la vitesse horizontale de la surface du liquide.

La première équation provient des lois de Newton (somme des forces appliquées à une colonne égale à sa masse multipliée par son accélération) la seconde correspond à une lui de conservation du volume.

Si la vitesse du liquide est faible et si la hauteur varie lentement, on peut réécrire une version approximative des deux équations précédentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{dt}(x,t) + g\dfrac{dh}{dx}(x,t) = 0 \\ \dfrac{dh}{dt}(x,t) + p(x)\dfrac{du}{dx}(x,t) = 0 \ . \end{array} \right.$$

En dérivant ces deux équations respectivement par rapport à x et à t on obtient encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2u}{dxdt}(x,t) + g\dfrac{d^2h}{dx^2}(x,t) = 0 \\ \dfrac{d^2h}{dt^2}(x,t) + p(x)\dfrac{d^2u}{dxdt}(x,t) = 0 \ . \end{array} \right.$$

Ce qui nous permet d'extraire :

$$\frac{d^2h}{dt^2}(x,t) = gp(x)\frac{d^2h}{dx^2}(x,t) \ .$$

Dans le cas bidimensionnel (avec des variables spatiales horizontales x et y) et en considérant que p est constant (c'est à dire que le fond du conteneur est plat et horizontal), cette équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2h}{dt^2}(x,y,t) = gp\left(\frac{d^2h}{dx^2}(x,y,t) + \frac{d^2h}{dy^2}(x,y,t)\right) \ .$$

Sans rentrer dans les détails, on peut montrer qu'il est possible de discrétiser cette équation d'évolution dans le domaine temporel et dans le domaine spatial de la façon suivante :

- on définit deux tableaux bidimensionnels H_1 et H_2 de flottants, de taille $N \times N$ correspondant à la discrétisation spatiale de h ;
- initialement, les deux tableaux sont initialisés à zéro ;
- à chaque itération, on permute H_1 et H_2, les nouvelles valeurs de H_2 sont obtenues grâce à la formule suivante :

$$H_2[x,y] = \alpha \left(\frac{H_1[x-1,y] + H_1[x+1,y] + H_1[x,y-1] + H_1[x,y+1]}{2} - H_2[x,y] \right) .$$

Ici, le coefficient α utilisé est dans l'intervalle $]0,1[$ et correspond à un coefficient d'amortissement des oscillations.

On demande de réaliser en OpenGL / GLUT un programme qui représente la surface d'un liquide obéissant à cette loi, en utilisant par exemple des primitives `TRIANGLE_STRIP` sur une grille carrée pour représenter la surface du liquide.