Résumé de thèse:

Un résultat d'existence pour les ensembles minimaux par optimisation sur des grilles polyédrales

Rappelons qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est dite minimale si sa mesure de Hausdorff d-dimensionnelle ne peut être rendue plus petite par déformation dans une classe de compétiteurs adaptée. On peut citer comme exemple le problème de Plateau standard, pouvant se réécrire comme celui de trouver un ensemble minimal pour les déformations à support relativement compact dans un domaine, la frontière du domaine jouant alors le rôle d'une condition topologique de bord.

Un ensemble quasiminimal au sens d'Almgren n'est pas forcément minimal puisque sa mesure peut décroître après déformation, mais seulement de manière contrôlée relativement à la mesure des points qui ont été déformés. Par exemple le graphe d'une application lipschitzienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{n-d}$ est quasiminimal et de façon générale, on sait (voir [A]) que les ensembles quasiminimaux sont rectifiables. Lorsqu'on considère la réduction E^* d'un ensemble quasiminimal E, qui consiste à prendre le support de la mesure de Hausdorff k-dimensionnelle restreinte à E — en gros en enlevant les points dont la contribution à la mesure de E est nulle — on sait en outre (voir [DS]) que E^* contient de *grandes images lipschistziennes* et est *uniformément rectifiable*.

Une autre propriété remarquable concerne les limites de Hausdorff de suites d'ensembles quasiminimaux réduits. Dans ce contexte, non seulement la limite est quasiminimale et réduite, mais en outre la mesure de Hausdorff est semi-continue inférieurement (voir par exemple [D]), ce qui n'est généralement pas le cas. Cette propriété fait des limites de suites minimisantes d'ensembles quasiminimaux les candidates idéales à la résolution de problèmes d'existence sous contrainte topologique stable par déformation.

On propose ici, dans le cadre d'un problème sur un ouvert en dimension et codimension quelconques, un premier résultat d'existence utilisant une méthode systématique inspirée de Reifenberg pour construire une suite minimisante d'ensembles quasiminimaux, par minimisation finie sur les sous-faces d-dimensionnelles de grilles polyédrales adaptées. La construction de telles grilles est assez délicate, puisqu'on s'impose à la fois de faire l'approximation polyédrale d'un ensemble rectifiable le long de certains plans tangents pour contrôler l'augmentation de mesure correspondante, tout en gardant un contrôle uniforme sur la régularité des polyèdres de façon à éviter qu'ils ne soient trop plats. Des bornes uniformes sur la forme des polyèdres sont en effet utilisées lors de la discrétisation polyédrale des compétiteurs du problème — mettant en jeu des projections radiales successives sur la frontière des sous-faces de dimension décroissante de n à d — et permettent d'obtenir automatiquement une constante de quasiminimalité ne dépendant que de n et d.

La suite d'ensembles quasiminimaux obtenue converge alors en distance de Hausdorff sur tout compact du domaine vers un ensemble *minimal* — ou *presque-minimal* dans le cas d'une fonctionnelle $J_h^d(E) = \int h d\mathcal{H}^d$ avec une fonction h continue à valeurs dans $[1, M]$. L'existence de rétractions lipschitziennes sur la limite obtenue (donnée par le théorème de Jean Taylor dans [T] pour le cas $d = 2$, $n = 3$) devrait alors permettre d'affirmer que la limite fait encore partie de la classe topologique initiale considérée. Le résultat d'existence pourrait encore se généraliser à certains problèmes sur des variétés sans bord, ou dans une certaine mesure à des domaines fermés pour lesquels on connait une rétraction lipschitzienne d'un voisinage sur le bord.

Références

[A] F. Almgren — *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Memoirs of the A.M.S. 165, 1976.

[T] J. Taylor — *The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces*, Annals of Mathematics 103, 489-539, 1976.

[DS] G. David et S. Semmes — *Uniform rectifiability and quasiminimizing sets of arbitrary codimension*, Memoirs of the A.M.S. 687, volume 144, 2000.

[D] G. David — *Limits of Almgren quasiminimal sets*, Contemporary Mathematics 320, 2003.