QUELQUES NOTES SUR LA TRIBU ASYMPTOTIQUE, AUSSI CONNUE SOUS LE NOM DE TRIBU QUEUE

par

D. Simon

Il s'agit ici de revenir sur la notion de tribu-queue ou tribu-asymptotique qui est abordée dans les exercices en lien avec la loi du 0-1 de Kolmogorov. Comprendre ce qu'elle contient (et ne contient pas nécessairement) n'est pas immédiat : cela mélange des techniques de style "limite supérieure" ainsi que des techniques de tribu, les deux posant souvent des problèmes de compréhension ou de maîtrise.

Montrer des mesurabilités de v.a. pour cette tribu et savoir utiliser la loi du 0-1 n'est pas toujours chose aisée.

1. Définitions et propriétés

Avant toute idée variable aléatoire, la tribu-queue est tout d'abord une notion associée à des tribus.

Définition 1.1. — Soit $(\mathcal{E}_n)$ une suite de tribus sur un même ensemble Ω. La tribu-queue associée à $(\mathcal{E}_n)$ est la tribu

$$\overline{\mathcal{E}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma\left(\bigcup_{m\geq n} \mathcal{E}_m\right) \tag{1}$$

On remarquera immédiatement les faits suivants :

1. la structure *ressemble* à celle d'une limite supérieure d'ensembles, à ceci près que l'union est suivie d'une complétion σ (car une union de tribu n'est pas nécessairement une tribu...). Néanmoins, on pourra garder à l'idée cette analogie pour certains schémas de preuves et des intuitions similaires à la proposition 2.1 ci-dessous ;
2. les tribus $\mathcal{E}'_n = \sigma\left(\bigcup_{m\geq n} \mathcal{E}_m\right)$ forment une famille *décroissante* de tribus [1]
3. les tribus $(\mathcal{E}_n)$ sont quelconques ; elles peuvent avoir des liens forts (toute égale) ou ne pas en avoir du tout (tribus indépendantes sous une probabilité $\mathbb{P}$).

Pour montrer qu'un événement A appartient à $\overline{\mathcal{E}}$, il s'agit donc de montrer qu'il appartient à tous les $\mathcal{E}'_n$ mais, puisque la famille décroissante, il suffit de montrer qu'il appartient à un nombre infini [2] de $\mathcal{E}'_n$.

1. Montrer le en exercice.
2. Montrer cette équivalence en exercice.

2. Interprétations et cas particuliers

2.1. Pour des événements. — L'une des difficultés est de comprendre ce que être dans $\overline{\mathcal{E}}$ signifie pour un événément A.

Pour une sous-tribu $\mathcal{G}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $A \in \mathcal{G}$ signifie intuitivement qu'il y a assez d'information dans $\mathcal{G}$ pour savoir si A se réalise ou non.

Pour la tribu-queue, formulons d'abord une propriété "négative" pour un $A \in \overline{\mathcal{E}}$: aucune famille finie $(\mathcal{E}_{n_1}, \ldots, \mathcal{E}_{n_k})$ n'apporte d'information sur A. En effet, il suffit de prendre $N = \max_{1 \leq j \leq k} n_j$ et $A \in \mathcal{E}'_N$, qui ne dépend pas nécessairement des tribus $\mathcal{E}_{n_1}, \ldots, \mathcal{E}_{n_k}$. Formellement, $\overline{\mathcal{E}}$ n'a pas de raison [3] de contenir $\mathcal{E}_k$, quel que soit k.

Puisque $\overline{\mathcal{E}}$ n'a aucune raison de contenir aucun des $\mathcal{E}_i$, il est légitime de se demander ce que peut bien contenir cette tribu-queue ! Elle contient uniquement les propriétés asymptotiques contenues dans les tribus $\mathcal{E}_n$. En voici un exemple.

Proposition 2.1. — *Soit $(\mathcal{E}_n)$ une famille de sous-tribus de $(\Omega, \mathcal{F})$. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements de $\mathcal{F}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{E}_n$. Alors $\limsup A_n \in \overline{\mathcal{E}}$.*

L'interprétation est la suivante : l'information contenue dans $\overline{\mathcal{E}}$ ne permet pas de savoir si on est dans un A_n donné ($\overline{\mathcal{E}}$ n'a aucune raison de contenir $\mathcal{E}_n$) mais elle permet de savoir si on est dans une infinité d'entre eux.

Démonstration. — Notons $A'_n = \cup_{m \geq n} A_m$. Les (A'_n) forment une famille *décroissante* d'ensembles. Il s'agit alors de montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A'_n \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{E}'_k$$

Il s'agit ici d'être prudent pour montrer ce résultat qui n'a rien d'évident. Cela revient à montrer (être dans une intersection) que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A'_n \subset \mathcal{E}'_k \tag{2}$$

Comme $\mathcal{E}'_k$ contient tous les $\mathcal{E}_m$ avec $m \geq k$ et $A_m \in \mathcal{E}_m$, on a ainsi, pour tout $m \geq k$, $A_m \in \mathcal{E}'_k$ puis, par unions dénombrables, on a

$$\forall n \geq k, \qquad A'_n \in \mathcal{E}'_k \tag{3}$$

L'utilisation de la décroissance des A'_n est alors nécessaire. En effet, pour une suite *décroissante*, on a [4], pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A'_n = \bigcap_{n \geq p} A'_n$$

(on peut commencer à partir de n'importe quel entier). En réduisant ainsi l'intersection de (2) à partir du rang k, on obtient ainsi que (3) implique (2), que nous souhaitions. $\square$

On remarque également que $\liminf A_n = (\limsup A_n^c)^c$ est également dans $\overline{\mathcal{E}}$ car les tribus sont stables par passage au complémentaire.

2.2. Pour des variables aléatoires. — Le plus souvent, les tribus $\mathcal{E}_n$ rencontrées sont engendrées par des variables aléatoires. Il est donc utile de comprendre l'information que $\overline{\mathcal{E}}$ contient sur une suite de v.a.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Nous considérons ici le cas $\mathcal{E}_n = \sigma(X_n)$. Pour rappel, cette notation est un abus (puisque X_n n'est pas un sous-ensemble de $\mathcal{F}$) pour désigner la tribu image-réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par X (i.e. celle qui contient les $X^{-1}(A)$ pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Théorème 2.2. — *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit $\overline{\mathcal{E}}$ la tribu-queue associée à la suite (X_n). Alors,*

(i) $\overline{X} = \limsup X_n$ *est $\overline{\mathcal{E}}$-mesurable ;*

(ii) $\underline{X} = \liminf X_n$ *est $\overline{\mathcal{E}}$-mesurable ;*

---

3. Elle peut le contenir dans certains cas particuliers (par exemple, en prenant $\mathcal{E}_n = \mathcal{G}$ une sous-tribu fixe donnée) mais ce n'est pas obligatoire.

4. Montrer le en exercice.

(iii) l'événement $C = \{X_n$ *converge*$\}$ *est* $\overline{\mathcal{E}}$*-mesurable ;*

(iv) si $X_n \to X$ *presque sûrement,* X *est* $\overline{\mathcal{E}}$*-mesurable ;*

(v) l'événement $A_l = \{l$ *est une valeur d'adhérence de* $(X_n)\}$ *est* $\overline{\mathcal{E}}$*-mesurable ;*

(vi) pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, l'événement "la suite* (X_n) *visite* A *un nombre infini de fois" appartient* $\overline{\mathcal{E}}$*.*

Ce théorème illustre le nom alternatif de "tribu asymptotique" pour $\overline{\mathcal{E}}$ car elle décrit les propriétés asymptotiques des variables aléatoires.

Démonstration. — Pour le premier item, il suffit de montrer que $\overline{X}^{-1}([t,\infty[) \in \overline{\mathcal{E}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ car les ensembles $[t, +\infty[$ avec $t \in \mathbb{R}$ engendrent la tribu borélienne. On a (en utilisant la décroissance de $(Y_n)_n = ((\sup_{m\geq n} X_m)_n)$

$$\begin{aligned}
\overline{X}^{-1}([t,\infty[) &= \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} X_m \geq t\right\} = \left\{\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{m\geq n} X_m \geq t\right\} \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{\sup_{m\geq n} X_m \geq t\right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \left\{\sup_{m\geq n} X_m > t - 1/p\right\} \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} \{X_m > t - 1/p\} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} \{X_m > t - 1/p\} \\
&= \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \limsup\{X_n > t - 1/p\}
\end{aligned}$$

On a bien, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\{X_n > t - 1/p\} \in \sigma(X_n)$ donc, par la propriété 2.1, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\limsup_n\{X_n > t - 1/p\} \in \overline{\mathcal{E}}$. Par intersection dénombrable, on obtient ainsi $\overline{X}^{-1}([t,\infty[) \in \overline{\mathcal{E}}$.

Le second item fonctionne de la même manière.

Le troisième item correspond à $C = \{\overline{X} = \underline{X}\}$ et les deux v.a. sont $\overline{\mathcal{E}}$-mesurables donc [5] $C \in \overline{\mathcal{E}}$.

Pour le quatrième item, $\mathbb{P}(C = 1)$ et X est unique à un ensemble de définition négligeable près. Dans ce cas $X = \overline{X} = \underline{X}$ donc X est $\overline{\mathcal{E}}$-mesurable.

Le cinquième item est une variante de la preuve précédente. En effet, l est une valeur d'adhérence de $(X_n(\omega))$, si pour tout entier $p > 0$, il existe une infinité d'entiers n tels que $|X_n(\omega) - l| < 1/p$. L'événement A_l s'écrit ainsi

$$A_l = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \limsup_n\{|X_n(\omega) - l| < 1/p\}$$

Chaque événement $\{|X_n(\omega) - l| < 1/p\}$ est dans $\sigma(X_n)$ et on conclut par la proposition 2.1 puis intersection dénombrable dans $\overline{\mathcal{E}}$. □

2.3. Attention aux pièges. — On pourrait croire à la suite du théorème 2.2 que n'importe quel événement autour la convergence des X_n est dans la tribu-queue. Ce n'est pas le cas du tout.

Un piège classique est le suivant :

— l'événement $S =$"la série $\sum_n X_n$ converge" est bien dans la tribu-queue.

— si $\mathbb{P}(S) = 1$, la limite $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ n'est pas nécessairement mesurable par rapport à la tribu-queue !

En effet, on observe que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ fixé, la convergence de $\sum_{n\geq 0} X_n$ est équivalente à la convergence de la série tronquée $\sum_{n\geq p} X_n = \sum_{m\geq 0} X_{p+m}$, car les deux séries ne diffèrent que par un nombre fini de termes. En notant S_p l'événement "la série tronquée à l'ordre p converge, on a bien $S = S_p$ mais également par construction de S_p, on a aussi $S_p \in \mathcal{E}'_p$. Donc on a bien $S \in \mathcal{E}'_p$ pour tout p et donc $S \in \overline{\mathcal{E}}$.

Pour le deuxième item, il suffit de voir Z dépend de X_1 par son premier terme et il n'y a donc aucune raison que Z soit $\overline{\mathcal{E}}$-mesurable. Cela peut être rendu rigoureux en utilisant une construction explicite avec des v.a. indépendantes et la loi du 0-1 ci-dessous.

Il existe de nombreux pièges de ce type là. En lien avec le sixième item du théorème 2.2, on peut aussi observer que le nombre de visite V_A de $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ n'est pas $\overline{\mathcal{E}}$-mesurable, alors qu'on a bien $\{V_A \text{ fini}\} = \{V_A = +\infty\}^c$ est bien dans $\overline{\mathcal{E}}$.

5. Attention, ce résultat n'est pas complètement trivial

3. Loi du 0-1 de Kolmogorov

Vous avez déjà vu en cours que la bonne notion d'indépendance se formule sur les *tribus* (celle sur les événements est un peu faible, celle sur les v.a. est une connaissance de celle sur les tribus).

La loi du 0-1 de Kolmogorov se formule de la manière la plus générale possible sous la forme suivante.

Théorème 3.1. — *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilités. Soit* $(\mathcal{E}_n)_n$ *une suite de* sous-tribus de $\mathcal{F}$ indépendantes sous $\mathbb{P}$. *Alors, tout événément* $A \in \overline{\mathcal{E}}$ *est indépendant de lui-même, et donc* $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Un exemple intuitif consiste à imaginer des v.a. U_n indépendantes sur $[0, 1]$ et l'événement $C =$"les U_n convergent vers une v.a. X", qui est, d'après ce qu'on a dit, dans la tribu-queue. La convergence signifie que les X_n doivent se "synchroniser" pour se rapprocher d'une limite or l'indépendance a tendance à "désynchroniser" les v.a. Donc, soit leurs lois les répartissent sur des intervalles non triviaux et on ne peut avoir de convergence ($\mathbb{P}(C) = 0$), soit leurs lois les poussent vers une valeur donnée et, indépendance ou non, les X_n se rapprochent de cette valeur et on a $\mathbb{P}(C) = 1$). On peut imaginer des variantes avec des dés, des pièces, des urnes, etc.

Il est intéressant de considérer simultanément la proposition 2.1 et les théorèmes 2.2 et 3.1 : on se rend compte que l'indépendance de v.a. rend de nombreux événements asymptotiques "triviaux" du point de vue des probabilités : nombres de visites infinis, convergences, adhérence etc.

De ce point de vue-là, c'est une alternative importante aux deux lemmes de Borel-Cantelli qui, pour des v.a. indépendantes, envoient également des probabilités de $\limsup A_n$ à 0 ou 1. Ils portent alors le nom joint de "loi du 0-1 de Borel" et donnent un critère quantitatif pour le choix de la valeur 0 ou 1.

4. Pour aller au-delà

— En dehors du cas des v.a. indépendantes, l'étude des événements de $\overline{\mathcal{E}}$, i.e. des propriétés asymptotiques des v.a., peut se révéler difficile et les tribus de queue peuvent ne pas être du tout triviale : cela correspond, entre autres, à toute l'étude de la convergence des variables aléatoires. La théorie des martingales et des chaînes de Markov (récurrence, transience, etc.) sont des outils précieux.

— une question de réflexion : la construction de la tribu de queue $\overline{\mathcal{E}}$ par (1) "ressemble" à une limite supérieure. Que pourriez-vous dire d'une tribu construite de la manière suivante

$$\underline{\mathcal{E}} = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} \mathcal{E}_m\right) \qquad ?$$

---

17 septembre 2025

D. Simon