

Programme de colle Surfaces

Classe de PT

Lycée La Martinière

Exercice 1

Soit a, b, c trois réels strictement positifs. Déterminer les équations paramétriques de l'ellipsoïde d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Indication : On pourra s'inspirer des équations paramétriques de la sphère. En déduire l'aire de cet ellipsoïde.

Exercice 2

Soit \mathcal{C} la courbe définie par
$$\begin{cases} x = z^2 + 2z \\ y = z^2 + z \end{cases}.$$

Montrer que cette courbe est plane, puis que c'est une parabole.

Exercice 3 (Plans tangents)

- 1) Déterminer les plans tangents à la surface Σ_1 d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ et perpendiculaires à la droite \mathcal{D} d'équations $x = \frac{y}{2} = -\frac{z}{2}$.
- 2) Déterminer les plans tangents à la surface Σ_2 d'équation $xy = z^3$ contenant la droite \mathcal{D} d'équations $x = 2$ et $y = 3z - 3$.
- 3) Les points de la surface Σ_3 d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ dont le plan tangent est parallèle à Π d'équation $2x + y - z = 0$.

Exercice 4

1) Soit \mathcal{C} la courbe définie par
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z + y = 1 \end{cases}.$$

- a) Projections sur chacun des plans de coordonnées.
- b) Déterminer un paramétrage cartésien de \mathcal{C} après avoir effectué le changement de base

$$\vec{I} = \vec{i} \quad \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{k}) \quad \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$$

2) Soit \mathcal{C} la courbe définie par
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - x + y^2 = 1 \end{cases}.$$
 Projections sur chacun des plans de coordonnées.

Exercice 5 (cylindres)

1) Soit \mathcal{C} la courbe paramétrée
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 1 \\ z = t^2 - t + 1 \end{cases}.$$

- a) Montrer que \mathcal{C} est plane¹. On donnera un vecteur normal \vec{u} au plan contenant \mathcal{C} .
- b) Déterminer l'équation cartésienne du cylindre Σ_1 de section droite \mathcal{C} , c'est-à-dire de directrice \mathcal{C} et de direction normale au plan contenant \mathcal{C} .

2) Équation cartésienne du cylindre Σ_2 de directrice \mathcal{C}
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$
 et de direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Équation cartésienne du cylindre Σ_3 de directrice \mathcal{C}
$$\begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$
 et de direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. On remarquera au passage que toute courbe paramétrée définie par des polynômes de degré au plus 2 est contenue dans un plan.

- 4) Équation cartésienne du cylindre Σ_4 circonscrit à la surface $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ et de direction $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6 (cônes)

- 1) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^3, f(tx) = t^k f(x)$. Montrer que Σ_1 d'équation $f(x) = 0$ est un cône. (vocabulaire : f est dite homogène de degré k).
- 2) Équation cartésienne du cône Σ_2 de directrice $\mathcal{C} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z^2 + ax = a^2 \end{cases}$ et de sommet $A(a, 0, 0)$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.
- 3) Soit \mathcal{P} la parabole $\begin{cases} x^2 = 2y \\ z = 0 \end{cases}$ et $A(0, 0, 1)$.
- a) Donner une équation paramétrique du cône Σ_3 de sommet A et de directrice \mathcal{P} .
- b) Montrer qu'il existe une droite \mathcal{D} telle que $\Sigma_3 \cup \mathcal{D}$ soit un cône de révolution dont on précisera l'équation cartésienne, l'axe et le demi-angle au sommet.
- 4) Équation cartésienne du cône Σ_4 circonscrit à la surface $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ et de sommet $A(0, 2, 0)$.
- 5) Équation cartésienne du cône Σ_5 circonscrit à la surface $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ et de sommet $A(0, 0, -1)$.

Exercice 7 (hyperboloïde à une nappe)

Soit a, b, c trois réels strictement positifs, et Σ la surface d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- 1) (bonus) Donner un paramétrage de Σ . On pourra penser aux fonctions hyperboliques.
- 2) Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on pose A_θ le point de coordonnées $(a \cos \theta, b \sin \theta, 0)$. Montrer que ce point est dans Σ .
- 3) Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ fixé, et \vec{u} un vecteur.
Écrire les conditions sur les coordonnées de \vec{u} pour que la droite $A_\theta + \text{Vect}(\vec{u})$ soit incluse dans Σ .
En déduire qu'il existe exactement deux droites, \mathcal{D}_θ et \mathcal{D}'_θ , passant par A_θ et contenues dans Σ .
- 4) Montrer que, pour tout $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$, il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases}$$

Indication : Poser dans un premier temps $A = \cos \theta$ et $B = \sin \theta$ ou raisonner géométriquement.

- 5) En déduire deux familles de droites engendrant Σ , en remarquant que l'équation de départ peut s'écrire.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

On pourrait de plus prouver que

- deux droites prises dans deux familles différentes sont toujours coplanaires ;
- deux droites prises dans une même familles ne sont jamais coplanaires.

Ce qui explique sans doute la solidité des structures de béton armé en forme d'hyperboloïde à une nappe.

Exercice 8

Pour chacune des surfaces suivantes, vérifier qu'elles sont de révolution et déterminer leur axe. Dans chacun des cas, décrire les parallèles et une méridienne.

- 1) $x^2 + y^2 - 8z = 0$ 2) $4x^2 + 4y^2 - 2z^2 = 1$ 3) $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = \text{Arccos } u \end{cases}$ 4) $(x^2 + z^2)^3 - y^2 + 2y - 3 = 0$

Exercice 9

Déterminer une équation cartésienne de la surface Σ de révolution engendré par la rotation autour de l'axe $x = y = z$ de la courbe \mathcal{C} paramétrée par $x = t$, $y = t^2$ et $z = -t^2$.

Exercice 10

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que la surface d'équation $z = f(x^2 + y^2)$ est de révolution. On précisera l'axe et une méridienne.

Exercice 11 (tore $S^1 \times S^1$)

Soit a et R deux réels vérifiant $0 < R < a$. On note Σ la surface de révolution engendrée par la rotation du cercle de centre $A(a, 0, 0)$ et de rayon R contenu dans le plan (Oxz) autour de l'axe (Oz) .

- 1) Déterminer une équation paramétrique² du tore Σ .
- 2) Déterminer une équation cartésienne du tore Σ .

Exercice 12 (conoïde)

- 1) Construction de la conoïde Σ .
 - a) Soit \mathcal{C} le cercle de centre $A(0, 1, 1)$ et de rayon 1 contenu dans le plan $y = 1$. Donner une équation paramétrique de \mathcal{C} .
 - b) Soit \mathcal{D}_t la droite joignant un point de paramètre t de \mathcal{C} à son projeté orthogonal sur (Oz) . Donner une équation paramétrique de \mathcal{D}_t .

On note Σ la surface réglée engendrée par les droites \mathcal{D}_t .

- 2) La surface Σ est-elle développable ?
- 3) Déterminer une équation cartésienne de $\Sigma' = \Sigma \cup (Oz)$. (ne pas oublier \square).
- 4) Préciser la nature de la courbe intersection de Σ avec un plan parallèle à Oxz .
- 5) Calculer le volume du solide intérieur à Σ compris entre les plans d'équation respective $y = 0$ et $y = 1$.

Exercice 13 (lignes de plus grande pente)

Soit Σ la surface d'équation $x^2 - y^2 = z$, et \mathcal{C} un arc \mathcal{C}^1 de paramétrage $\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto (f(t), g(t), z(t)) \end{cases}$

- 1) Donner la condition sur $t \mapsto z(t)$ pour que la courbe \mathcal{C} soit incluse dans Σ .
- 2) Quelle relation doivent vérifier f et g pour qu'en chaque point \mathcal{C} soit perpendiculaire à la section horizontale de Σ passant par ce point ?

La courbe \mathcal{C} est alors appelée une ligne de plus grande pente, et les sections horizontales des lignes de niveau.

Exercice 14 (Hélicoïde)

Soit Σ la surface paramétrée par $\begin{cases} x = \cos t - \lambda \sin t \\ y = \sin t + \lambda \cos t \\ z = t + \lambda \end{cases}$ avec $(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

- 1) Montrer que Σ est une surface réglée développable.
- 2) Soit \mathcal{C} la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
 - a) Montrer que \mathcal{C} est une hélice.
 - b) Déterminer la surface engendré par les tangentes à \mathcal{C} . Que remarque-t-on ?

Exercice 15 (supplémentaire)

Soit Σ la surface de représentation paramétrique : $x = u + v$; $y = 2uv$; $z = -u^3/3 + vu^2$. Montrer que Σ est réglée développable.

Exercice 16 (supplémentaire)

Lignes de plus grande pente pour les surfaces suivantes

$$\Sigma_1 : z(x^2 + y^2) - ax^2 = 0 \quad \Sigma_2 : z = \frac{\ln y}{\ln x}$$

2. Ce qui permet, par exemple, de le faire tracer par Maple.

Exercice 17 (OT PSI 2012) Soit Γ la courbe d'équations

$$\begin{cases} x = \frac{t-1}{t^2+t+1} \\ y = \frac{t^2+t+1}{t+1} \\ z = \frac{t^2+3t-2}{t^2+t+1} \end{cases}$$

- 1) Montrer que Γ est incluse dans un plan Π dont on donnera une équation et dans une quadrique cylindrique Σ d'axe \vec{k} dont précisera la nature et dont on donnera une équation.
- 2) Donner un paramétrage de Σ .
- 3) Représenter Γ et Σ sur une même figure.
- 4) À l'aide d'un changement de repère, donner une équation puis décrire la courbe plane Γ .

Exercice 18 (ddl) Soit Σ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

- 1) Déterminer le plan tangent à la surface Σ au point $M(1, 1)$.
- 2) Former une équation cartésienne du support de la surface Σ
- 3) Expression à l'aide d'une intégrale de l'aire de la portion de surface correspondant à $(u, v) \in [0, 1]^2$.

Exercice 19 (ddl)

Soit \mathcal{S} la surface d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

- a) A quelle condition l'intersection de \mathcal{S} et du plan $z = k$ contient-elle une droite ?
- b) Déterminer les droites incluses dans \mathcal{S} non parallèles à (xOy) .
- c) Montrer que celles-ci sont coplanaires.
- d) Déterminer le plan tangent à \mathcal{S} en chacun des points d'intersection de ces droites deux à deux ?

Exercice 20 (ddl)

Former une équation cartésienne de la surface Σ réunion des droites coupant

$$D_1 : \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}, D_2 : \begin{cases} y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \text{ et } D_3 : \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Exercice 21 (ddl)

Déterminer les plans tangents aux points réguliers de la surface $\Sigma : z^3 = xy$ contenant la droite déterminée par le système d'équations

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3(z + 1) \end{cases}$$

Exercice 22 (ddl)

Former une équation de la surface de révolution \mathcal{S} obtenue par la rotation de la courbe $\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = -t^2 \end{cases}$ autour

de la droite $\Delta : x = y = z$.

Exercice 23 (ddl)

Soit $\Sigma : x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1 = 0$. Montrer que Σ est une surface de révolution.