Programme de colle Séries

Classe de PT

Lycée La Martinière

1 Séries numériques

Exercice 1
Déterminer la nature des séries de terme général :

1) $u_n = \dfrac{2^n + 5}{3^n + 11}$, **2)** $u_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}$, **3)** $u_n = \left(n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$

Exercice 2
Déterminer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k^2 + (n-k)^2)^a}$

Solution. Encadrer $k^2 + (n-k)^2$ par $n^2/2$ et n^2. $\square$

Exercice 3
Soit $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} e^{-u_n}$

1) Étudier la nature de la suite u_n

2) Étudier la nature de la série de terme général u_n

3) Étudier la nature de la série de terme général $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$

Solution.

1) $u_n \geqslant 0$ donc $e^{-u_n} \leqslant 1$, d'où $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$. La suite converge vers 0.

2) Puisque $u_n \to 0$, nous pouvons faire un DL : $e^{-u_n} = 1 - u_n + o(u_n)$. Donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ qui est divergente, ainsi la série à termes positifs u_n diverge.

3) $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} e^{-u_n} = \dfrac{1}{n}(1 - u_n + o(u_n)) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{u_n}{n} + o\Big(\dfrac{u_n}{n}\Big)$.
Or $u_n \sim 1/n$ donc $v_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n(n-1)} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ est équivalente en valeur absolue à K/n^2, convergente d'après Riemann.

$\square$

Exercice 4
Pour $\alpha > 1$ on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Déterminer la limite de $(\alpha - 1)\zeta(\alpha)$ quand α tend vers 1^+

Exercice 5
Soit $x \in]0, +\infty[$. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t(t+x)}$.

1) Nature et valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+x)}$. On note $S(x)$ sa somme.

3) A l'aide d'un encadrement, montrer que $\displaystyle S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 6 (Restes et sommes partielles)
On cherche à obtenir des équivalent des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente, dans le cas des séries de Riemann.
On s'aidera d'une comparaison série / intégrale pour obtenir un encadrement.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < 1$. Montrer que

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent du reste $\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 7 (ddl)
Soit (u_n) une suite numérique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$$

1) On suppose dans cette question la série $\sum u_n$ absolument convergente. En observant un produit de Cauchy, montrer que la série $\sum v_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

2) On suppose dans cette question que la suite (u_n) tend vers 0. Déterminer la limite de (v_n)

3) On suppose dans cette dernière question la série $\sum u_n$ convergente.
Montrer la convergence de $\sum v_n$ et déterminer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

Solution.

1) Cours.

2) Avec des ε, à la Cesàro.

3) Écrire V_N, permuter les sommes, couper.

□

Exercice 8 (PT 2010 C, troisième partie)
Soit $\beta \in]1, +\infty[$. On pose

$$\begin{aligned} I_\beta &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad I_{k,\beta} &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

1) Comparer la convergence de la série $\displaystyle\sum_k I_{k,\beta}$ et de l'intégrale I_β.

2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+(k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant I_{k,\beta} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+k^\beta \pi^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

3) Soit $C \in \mathbb{R}^*$. On pose $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+C^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Calculer J.

4) Pour quelles valeurs de β l'intégrale I_β est-elle convergente ?

Exercice 9
Des comparaisons de convergence, en vrac. On suppose $a_n > 0$.

1) la série de terme général a_n et celle de terme général $\frac{a_n}{1+a_n}$.

2) la série de terme général a_n et celle de terme général $\frac{1}{n}\sqrt{a_n}$.

Solution.

1) Comparer a_n et $a_n/(1+a_n)$ consiste juste à encadrer $1/(1+x)$. Si x varie dans un intervalle borné $[0; A]$, $1/(1+A) \leqslant 1/(1+x) \leqslant 1$. Si a_n n'est pas borné, on peut trouver une suite extraite a_{φ_n} qui tends vers l'infini, et $a_{\varphi_n}/(1+a_{\varphi_n})$ ne tends pas vers 0. Donc la série des $a_n/(1+a_n)$ diverge.

2) Cauchy-Schwarz et contre exemple.

$\square$

Exercice 10
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1) Montrer que si la série de terme général u_n est convergente et $u_n \geqslant 0$, alors la série de terme général u_n^2 est convergente.

2) Ce résultat demeure-t-il vrai si les réels u_n ne sont plus supposés positifs ? <u>Indication</u> : *On pourra rechercher un contre-exemple sous la forme d'une série alternée.*

3) On suppose que $u_n > -1$ et que les séries de terme général u_n et u_n^2 convergent. Étudier la série de terme général $\ln(1+u_n)$.

Exercice 11
Soit (u_n) une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

1) Montrer que $\lim u_n = 0$ et que $\sum n(u_n - u_{n+1}) = \sum u_n$.

2) Calculer $S_p = \sum \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$.

Exercice 12
On considère l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable (i.e. la série $\sum |u_n|^2$ converge), muni de son produit scalaire canonique

$$< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

On note F l'ensemble des suites réelles à support fini, c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang (ce rang dépendant de la suite considérée).

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{R})$, différent de $\ell^2(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $F^\perp = \{0\}$

3) En déduire que $F^{\perp\perp} \neq F$

Solution.

1) Immédiat.

2) On note e_i la suite valant 1 en i et 0 ailleurs. Pour tout i, cette suite est dans F, et $(u|e_i) = 0$ entraîne $u = 0$.

3) Immédiat : $\{0\}^\perp = \ell^2$.

$\square$

2 Séries entières

Exercice 13

1) Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

a) $\sum n^{\sqrt{n}} z^n$, **b)** $\sum \dfrac{n^2}{3^n+n} z^n$, **c)** $\sum \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^{2n}$, **d)** $\sum \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right) z^n$

e) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10, **f)** $\sum \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) x^n$,

g) $\sum \sin(e^{-n}) x^n$, **h)** $\sum (-1)^n \ln n x^n$, **i)** $\sum x^{n^2}$, **j)** $\sum (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}) x^n$

2) Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes, ainsi que leur somme sur l'intervalle $]-R, R[$.

a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$, **b)** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{(n+1)3^n} x^n$, **c)** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos(na)}{n! \sin^n a} x^n$, et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(na)}{n! \sin^n a} x^n$ avec $a \notin \pi\mathbb{Z}$,

d) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^3+2n+1}{n!} x^n$, **e)** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

3) Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière, et calculer leur développement.

a) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$, **b)** $e^x \cos(x)$, **c)** $\dfrac{2}{x^2-4x+3}$, **d)** $\dfrac{e^{-x}}{1+x}$,

e) $\dfrac{1-x}{(1+x+x^2)(1-x)}$, **f)** $\ln(1+x+x^2)$.

Exercice 14

Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes. On exprimera explicitement les solutions obtenues à l'aide des fonctions usuelles.

1) $y' - x^2 y = 0$, $y(0) = 1$; **2)** $(1-x^2)y' - 2xy = 0$; **3)** $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

4) $xy'' + 3y' - 4x^3 y = 0$; **5)** $xy' - y = \dfrac{x^2}{1-x}$. **6)** $(1+x^2)y'' + 2xy' = 2$, $y(0) = y'(0) = 0$;

Exercice 15

Rayon de convergence de

1) d_n le nombre de diviseur $\geqslant 1$ de n et s_n la somme de ces diviseurs.

2) a_n la n-ième décimale de π.

3) $\sum x^{p_n}$ où p_n est le n-ième nombre premier.

Exercice 16

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, une série entière de rayon de convergence R.

1) **a)** Soit $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n^2$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est égal à R^2.

b) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin^2\left(\dfrac{1}{3^n}\right) x^n$.

2) **a)** Soit $\forall n \in \mathbb{N}, b_{2n} = a_n$, et $b_{2n+1} = 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est égal à $\sqrt{R}$.

b) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right) x^{2n}$.

Exercice 17 (ddl)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$.

Exercice 18 (ddl)
Soient $a, b > 0$ avec $a \neq b$.
Calculer c_n, le n-ième coefficient du développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$$

Exprimer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n$$

Exercice 19
Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.
Montrer que f est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On pourra passer par un DSE.

Exercice 20
On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$.

1) Déterminer le rayon de cette série entière.

2) Calculer $(1-x)f'(x)$, en déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 21
Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon $R_a = 1$. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} a_n, \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Rayon et expression de g en fonction de f.

Exercice 22
Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n(3n+2)}$.