Programme de colle Révisions d'analyse

Classe de PT

Lycée La Martinière

Exercice 1 (2010, Cachan — OT 3, corrigé)
Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 1$ et donner le sens de variation de (u_n). Montrer par l'absurde que (u_n) ne converge pas.

2) Quelle est la limite de la suite de terme général $v_n = u_n^2 - u_{n-1}^2$?

3) Montrer que la suite de terme général $w_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$ a la même limite que (v_n) et en déduire un équivalent de (u_n).

Exercice 2

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
- **b)** Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution dans $[0, 1]$. On notera ℓ cette solution.
- **c)** Montrer que $\exists k \in [0, 1[/ \forall n \in \mathbb{N}\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|$.
- **d)** En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

2) Sur le même modèle, étudier les suites suivantes

- **a)** $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{2u_n^2 + 1}$

Exercice 3
Donner la limite en 0^+ de $\dfrac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$.

Exercice 4
Montrer que les fonctions suivantes sont inversibles au voisinage de 0, puis déterminer le DL de celles-ci à l'ordre 3 en $f_i(0)$.

1) $f_1(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ **2)** $f_2(x) = 2x - e^{\sin x}$ **3)** $f_3(x) = \ln(1 + \sin x) + (\sin x)e^{\sin x}$

Exercice 5 (Petites mines)
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1) Montrer que l'équation $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$ possède au moins une solution.

2) Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ possède au moins une solution.

Exercice 6
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, \mathrm{d}t$.

1) Montrer que (u_n) est décroissante. Est-elle convergente ?

2) Calculer $u_{n+2} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire un équivalent de u_n.

Exercice 7
Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{t-1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$

Indication : *Penser aux DL.*

Exercice 8 (2007, ENSAM — OT 183)

1) Montrer que $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{t-\ln t}\,\mathrm{d}t$ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$. Donner les variations de f.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{1}{t-\ln t}-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=0$. En déduire que f a une limite finie en $+\infty$ que l'on précisera.

3) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et dérivable à droite en 0. Donner l'allure du graphe représentatif de la fonction f.

Exercice 9
Calculer la limite de la suite $\displaystyle\left(\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)_n$.

Exercice 10 (Théorème de Riemann-Lebesgue)
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux, T-périodique, d'intégrale nulle sur une période.
Montrer que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\int_a^b f(t)\varphi(st)\,\mathrm{d}t=0$.

2) On ne suppose plus que φ est d'intégrale nulle. Déduire de la question précédente que

$$\lim_{s\to+\infty}\int_a^b f(t)\varphi(st)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 11
Soit $f\in\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f'(x)\in[0,1]$ pour tout x, et $f(a)=0$. On définie la fonction F par

$$F(x)=\int_a^x f^3(t)\,\mathrm{d}t-\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

1) Déterminer les variations de F.

2) Monter que $\displaystyle\int_a^b f^3\leqslant\left(\int_a^b f\right)^2$.

Exercice 12 (ddl)
Pour p et q entiers naturels, on pose :

$$I_{p,q}=\int_a^b(t-a)^p(b-t)^q\,\mathrm{d}t$$

a) Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
b) Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factoriels.

Exercice 13 (ddl)
Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,f(x)-f(y)=\int_{2x+y}^{2y+x}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f.

Exercice 14 (ddl)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

Exercice 15 (Seconde formule de la moyenne, ddl)
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec f décroissante et positive.
a) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } a_k = a + k\frac{(b-a)}{n}$$

Montrer que

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

b) On introduit G la primitive de g s'annulant en a.
Montrer que

$$f(a) \min_{[a,b]} G \leqslant S_n \leqslant f(a) \max_{[a,b]} G$$

c) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ vérifiant

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a) \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues avec f monotone.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a) \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b) \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 16 (ddl)
Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ positive et décroissante sur $I = [a, b]$.
Soit g une fonction continue sur I. On définit $G : I \to \mathbb{R}$ par la relation

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$G([a, b]) = [m, M]$$

b) Montrer que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a) \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$