Programme de colle Réduction

Classe de PT

Lycée La Martinière

Exercice 1
Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et que

$$\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$$

Soit $\varphi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f)(x) = f(-x)$. Nature, valeurs propres et sous-espaces propres.

Exercice 2
Idem avec $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) =^t M$. Montrer que φ est une symétrie, éléments propres.

Exercice 3
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in E$ fixée. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ définie par $\varphi(M) = AM$.
Matrice de φ dans la base canonique. Valeurs propres de φ en fonction de celles de M.

Exercice 4
Soient $E = \ell^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'espace des suites réelles bornées et $\Delta : E \to E$ l'endomorphisme défini par

$$\Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

Déterminer les valeurs propres de Δ.

Planche 1 (2011, ENSAM — élève 14)
Soit $E = \mathbb{R}^3$, $u \in E$, $u = (a,b,c)$ avec u non nul. Soit $f(x) = x + u \wedge x$.

1) Montrer que f est un endomorphisme et écrire sa matrice dans la base canonique.

2) Montrer que 1 est la seule valeur propre réelle et déterminer le sous espace propre associé.

3) **a)** La matrice associée à f est elle diagonalisable ?

b) L'application f est elle bijective ? Déterminer le rang de f.

Exercice 5 (matrices circulantes – à reformuler)

$$\text{Soit } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \ddots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

1) Donner le polynôme minimal de J (Indication : *Regarder* J^n *puis* $P(J)$ *pour* $\deg P \leqslant n-1$), en déduire le polynôme caractéristique de J. Diagonaliser J sur $\mathbb{C}$.

2) Montrer que A est un polynôme en J et diagonaliser A sans calculs.

Exercice 6 (ddl)
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = P - (X+1)P'$.
a) Justifier que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Déterminer les valeurs propres de φ et justifier que φ est diagonalisable.

Exercice 7
Une somme de diagonalisable est-elle diagonalisable ? Même question avec le produit.

Exercice 8 (ddl)
Montrer que l'application $f : P(X) \mapsto (X^2-1)P''(X)+2XP'(X)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Former la matrice de f relative à la base canonique de E. En déduire la diagonalisabilité de f ainsi que ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Exercice 9 (ddl)
Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ définie par $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A_1 et A_2 le sont.

Exercice 10 (ddl)
Soient f, g endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose que f est diagonalisable. Montrer :

$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow \text{ chaque sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g$$

Suite : a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $B \in \mathbb{K}[A]$ ou $A \in \mathbb{K}[B]$.
b) Le résultat subsiste-t-il dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$?

Exercice 11 (ddl)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer le polynôme caractéristique de A puis trigonaliser la matrice A.

Exercice 12 (ddl)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer le polynôme caractéristique de A puis trigonaliser la matrice A.

Exercice 13 (ddl)
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
a) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
b) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
c) Mêmes questions avec B.

Exercice 14 (ddl)
Soient $a, b \in \mathbb{R}^\star$ tels que $|a| \neq |b|$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$)
a) Calculer le rang de A. En déduire que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
b) Déterminer deux vecteurs propres non colinéaires et en déduire que A est diagonalisable.

Exercice 15
La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

1) Diagonaliser A, donner la matrice de passage et son inverse.

2) Déterminer toutes les matrices M' telles que $M'^2 = D$, où D est la matrice diagonale obtenue en 1.

3) En déduire toutes les matrices M telles que $M^2 = A$.

Exercice 16
Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 17
1) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

2) Déterminer les suites (u_n) telles que $u_{n+3} = -u_n - 3u_{n+1} - 3u_{n+2}$.

Exercice 18
Soit S le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & 2x_n & - & y_n & + & z_n \\ y_{n+1} & = & & & y_n & + & z_n \\ z_{n+1} & = & -x_n & + & y_n & + & z_n \end{array}\right.$ avec $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ fixés

1) Écrire le système sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$. Exprimer X_n en fonction de A, de X_0 et de n.

2) Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et de n.

Exercice 19 (Cachan — OT 2007)
1) Prouver que φ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(X) = -X + \mathrm{Tr}\,(X)A$ où A est une matrice fixée non nulle, est un endomorphisme.

2) Prouver que φ est non injectif si et seulement si $\mathrm{Tr}\ A = 1$.

3) Pour $\mathrm{Tr}\ A \neq 1$, combien l'équation $\varphi(X) = B$ a-t-elle de solutions ? Calculer la trace de ces solutions, puis résoudre cette équation.

4) Pour $\mathrm{Tr}\ A = 1$, calculer $\mathrm{Tr}\ \varphi(X)$. Montrer que φ est le projecteur sur l'espace des matrices de trace nulle, puis résoudre l'équation $\varphi(X) = B$.

Exercice 20 (D'après PT A 2012)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$. , et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1) Montrer que f est diagonalisable.

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $u = P(f) \in \mathscr{L}(E)$.

a) Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.

b) Montrer que f et u commutent.

3) Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.

a) Montrer que $E_\lambda(f)$ stable par g.

b) Montrer que tout x vecteur propre de f est aussi un vecteur propre de g.

c) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

d) Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
Indication : *Utiliser le polynôme interpolateur de Lagrange P qui vérifie $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i.*