# Programme de colle Quadriques

Classe de PT

Lycée La Martinière

**Exercice 1**
Dans cette partie, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

**1)** On considère les quadriques $\mathscr{Q}_1$, et $\mathscr{Q}_2$ d'équations cartésiennes respectives

$$4x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 4yz + 4xz - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad -5x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - 2yz + 6xz - 1 = 0$$

Déterminer la nature des quadriques $\mathscr{Q}_1$ et $\mathscr{Q}_2$.

**2)** On considère la quadrique $\mathscr{Q}_3$ d'équation cartésienne

$$4x^2+4y^2+4z^2+4xy-4xz+4yz-(9\sqrt{2}+2\sqrt{6}+4\sqrt{3})x+(-9\sqrt{2}+2\sqrt{6}+4\sqrt{3})y+(4\sqrt{6}-4\sqrt{3})z-96=0$$

**a)** Déterminer la matrice $A$ de la forme quadratique associé à la quadrique $\mathscr{Q}_3$.

**b)** Déterminer les valeurs propres de $A$, puis une base $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ orthonormée de vecteurs propres.

**c)** Donner une équation réduite de $\mathscr{Q}_3$ dans $(O, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$.

**d)** Donner l'équation réduite de la quadrique $\mathscr{Q}_3$ dans un repère que l'on déterminera. On précisera en particulier les coordonnées dans $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ de l'origine de ce repère

**Solution.**

**1)** Notons $A_1$ et $A_2$ les matrices des formes quadratiques associées respectivement à $\mathscr{Q}_1$ et $\mathscr{Q}_2$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Étude de $\mathscr{Q}_1$ : Calculons le polynôme caractéristique *(on vérifie ses calculs à l'aide de la trace)*

$$\chi_1(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 4-\lambda & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-6)$$

Après changement de base, le terme constant est le même et $\mathscr{Q}_1$ a pour équation

$$4y_1^2 + 6z_1^2 = 1$$

$\boxed{\text{La quadrique } \mathscr{Q}_1 \text{ est un cylindre elliptique}}$

- Étude de $\mathscr{Q}_2$ : $\chi_2(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^3 - 7\lambda^2 + 4$

... qui ne semble pas avoir de racines évidentes. La matrice $A_2$ étant symétrique réelle, elle est diagonalisable, donc ses valeurs propres $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ (les racines de $\chi_2$) sont réelles.
Le produit des racines vaut 4 (le terme constant, $= \det(A_2)$), donc il n'y a pas de racines nulles, et il y a 0 ou 2 valeurs propres négatives. De plus $\mathrm{Tr}\,(A_2) = -7 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, donc il y a exactement une valeur propre $\alpha$ positive et deux valeurs propres négatives $-\beta$ et $-\gamma$.
Ainsi $\mathscr{Q}_2$ a pour équation $\alpha x_1^2 - \beta y_1^2 - \gamma z_1^2 = 1$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$. En multipliant par $-1$ :

$$-\alpha x_1^2 + \beta y_1^2 + \gamma z_1^2 = -1$$

$\boxed{\text{La quadrique } \mathscr{Q}_2 \text{ est un hyperboloïde à deux nappes}}$ *(il y avait une erreur, j'aurais du écrire $-2xy + 6yz + 2xz$)*

**2)** **a)** $\boxed{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$

**b)** Polynôme caractéristique : $\chi_3(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \cdots = -\lambda(\lambda - 6)^2$.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } \lambda = 0 \text{ de multiplicité 1, et } \lambda = 6 \text{ de multiplicité 2}}$.

- $\underline{\lambda = 0}$ : On remarque que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $AX = 0$, donc est un vecteur propre pour la valeur propre 0, or celle-ci est de multiplicité 1, donc $E_0 = \text{Vect}\left((1, -1, 1)\right)$.
- $\underline{\lambda = 6}$ L'équation de $E_6 = \text{Ker}\,(A - 6I_3)$ est $x - y + z = 0$, donc $E_6 = \text{Vect}\left((1, 1, 0), (-1, 0, 1)\right)$.

Pour obtenir une base **ortho**normée, il nous reste à orthogonaliser (par la méthode de Schmidt) la base de $E_6$ puis diviser les vecteurs obtenus par leurs normes.

Posons $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (-1, 0, 1)$. Cherchons $\varepsilon_3 = e_3 - \alpha e_2$ tel que $< \varepsilon_3, e_2 >= 0$, c'est-à-dire

$$< \varepsilon_3, e_2 >=< e_3, e_2 > -\alpha < e_2, e_2 >= -1 - 2\alpha = 0$$

Donc $\varepsilon_3 = e_3 + \dfrac{1}{2} e_2 = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Conclusion : $\boxed{(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right) \text{ est une base orthonormée de vecteurs propres.}}$

**c)** Notons $P$ la matrice correspondant au changement de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) \to (O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} z_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} z_1 \end{pmatrix}$$

Où $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ dans la nouvelle base. En remplaçant $x$, $y$ et $z$ dans la partie linéaire, il vient

$$\begin{aligned} & -(9\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3})x + (-9\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3})y + (4\sqrt{6} - 4\sqrt{3})z \\ = \; & -(9\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3}) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} z_1\right) \\ & +(-9\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3}) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_1\right) \\ & +(4\sqrt{6} - 4\sqrt{3}) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} z_1\right) \\ = \; & -12x_1 - 18y_1 + 12z_1 \end{aligned}$$

Ainsi l'équation de $\mathscr{Q}_3$ dans $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est

$$\boxed{6y_1^2 + 6z_1^2 - 12x_1 - 18y_1 + 12z_1 - 96 = 0}$$

On peut simplifier par 6 cette équation : $y_1^2 + z_1^2 - 2x_1 - 3y_1 + 2z_1 - 16 = 0$.

**d)** On fait disparaître la partie linéaire autant que possible :

$$\begin{aligned} y_1^2 + z_1^2 - 2x_1 - 3y_1 + 2z_1 - 16 &= \left(y_1 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (z_1 + 1)^2 - 1 - 2x_1 - 16 \\ &= \left(y_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (z_1 + 1)^2 - 2\left(x_1 - \frac{77}{8}\right) \end{aligned}$$

Soit $\Omega$ le point de coordonnées $\left(\frac{77}{8}, \frac{3}{2}, -1\right)$ dans $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, l'équation de $\mathscr{Q}_3$ dans $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est alors

$$\boxed{Y^2 + Z^2 = 2X}$$

C'est un paraboloïde (de révolution). Les coordonnées de $\Omega$ dans le repère de départ sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \frac{77}{8} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\square$

**Exercice 2**
À l'aide de l'exercice précédent, en commençant par réduire la forme quadratique associée, donner l'équation réduite et décrire la surface pour chacune des équations suivantes

**1)** $x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 4xy - 8yz + 2zx + y + z = 0$ **2)** $3x^2 - z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 2x - 8y + 6z = 0$

**3)** $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2zx + 4x - 2y + z + 1 = 0$ **4)** $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = 1$

**Exercice 3 (d'après écrits PT)**
Soit $\theta$ un réel. On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $2\,\mathrm{sh}\,(\theta)x^2 + y^2 + 2xz - 2y = 0$.

**1)** Montrer que le point $\Omega$ de coordonnées $(0, 1, 0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{S}$.

**2)** Déterminer un repère de $\mathbb{R}^3$ dans lequel $\mathscr{S}$ a pour équation $X^2 + e^{\theta}Y^2 - e^{-\theta}Z^2 = 1$.

**3)** Quelle est la nature de $\mathscr{S}$ ? Est-elle de révolution ?