Programme de colle Fourier

Classe de PT

Lycée La Martinière

Exercice 1
Montrer qu'il n'existe pas de fonction 2π-périodique continue par morceaux telle que sa série de Fourier soit $\sum \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2
Soit $\theta \in]0, \pi[$. Soit f la fonction 2π-périodique paire donnée par

$$\begin{cases} f(x) & = & 1 & \text{si } x \in [0, \theta] \\ f(x) & = & 0 & \text{si } x \in]\theta, \pi] \end{cases}$$

1) Tracer f sur $[-\pi, \pi]$.

2) Développer la fonction f en série de Fourier.

3) Étudier la convergence de la série de Fourier.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ pour $\theta \in]0, \pi[$, puis pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$.

Exercice 3 (ddl)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π périodique, paire, telle que

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = x$$

a) Calculer la série de Fourier de f.
b) Etudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de f.
c) Déterminer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

d) En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 4
Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = x^2.$$

1) Étudier la parité de f. Tracer f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2) Développer la fonction f en série de Fourier.

3) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad , \qquad \Sigma_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 5 (E3A PC 2007)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, et f, la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = \operatorname{ch}(\alpha x).$$

1) Développer la fonction f en série de Fourier.

2) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}, \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}.$$

Exercice 6
Soit f la fonction 2-périodique impaire définie par

$$\forall x \in [0, 1], \qquad f(x) = x(1 - x).$$

1) Tracer f sur $[-1, 1]$.

2) Développer la fonction f en série de Fourier.

3) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\Sigma_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \quad , \quad \Sigma_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \quad \text{et} \quad \Sigma_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$$

Exercice 7
Soit f la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \qquad f(x) = e^{-x}$$

1) Calculer les coefficients de Fourier complexes[1] et de la fonction f.

2) En déduire que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + k^2} = \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}}.$$

Exercice 8

1) Décomposer en éléments simple la fraction rationnelle $\dfrac{1}{5 + 2(X + \frac{1}{X})}$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{5 + 4\cos x}$. À l'aide d'une série entière, développer f en série de Fourier. Indication : *Écrire $\cos x$ avec des exponentielles, et utiliser 1).*

3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{5 + 4\cos x}\, \mathrm{d}x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (ddl)
Existe-t-il une suite (α_n) de réels telle que

$$\forall t \in [0, \pi], \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos(nt)?$$

Indication : *oui, puis les calculer.*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}\, \mathrm{d}x$ et $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$

Exercice 10 (ddl – Inégalité de Sobolev)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que

$$\|f\|_\infty^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} \left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 11

1) Soit $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ si $0 < t < \pi$ et $\varphi(0) = 0$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi[$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin(nt)\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I_n puis calculer $I_{n+1} - I_n$.

En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) En déduire que $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.