Programme de colle Espaces vectoriels

Classe de PT

Lycée La Martinière

1 Familles, Combinaisons linéaires, Somme directe, supplémentaires

Planche 1 (2011, ENSAM — élève 7)
Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \forall x \in \mathbb{R}\, P(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t\}$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que si $P \in E$ alors $P' \in E$.

3) Monter que $P \in E$ ne peut pas être de degré 2.

4) Déterminer E.

Exercice 1 (ddl)
Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 2 (ddl)
Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$$

a) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, P_k(x) \in \mathbb{Z}$$

c) Trouver tous les polynômes P tels que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}$$

Exercice 3 (ddl)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{K}_n[X]$ un polynôme non nul.
Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \,/\, A \mid P\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer la dimension et un supplémentaire.

Exercice 4
Montrer que les familles suivantes sont libres :

1) $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant 2}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\left(\dfrac{1}{X-a}\right)_{a\in\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}(X)$

3) $(f_a)_{a\in\mathbb{R}_+}$ où $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \cos(ax)$.

4) $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = e^{ax}$.

Exercice 5 (ddl)
Soit $p \in \mathbb{N}^\star$ et E l'ensemble des suites réelles p périodiques i.e. l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n+p) = u(n)$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci.

Exercice 6
On note $E = C^0([0;1];\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on note $T(f) : [0;1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in [0;1] \qquad T(f)(x) = \int_0^x f(4(t-t^2))\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que $T(f)(x)$ est bien définie pour tout $x \in [0;1]$.

2) Montrer que T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

3) L'endomorphisme T est-il injectif ? Surjectif ?

2 Applications linéaires, matrices

Exercice 7
Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\forall x \in [0,1] \qquad T(f)(x) = \int_0^1 \varphi(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que T est un endomorphisme de E.

Exercice 8
Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(f)(x) = \int_0^x \sin(t-x) f(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que u est un endomorphisme de E.
(<u>Indication</u> : *Décomposer* $\sin(x-t)$ *pour se ramener à une intégrale sans paramètre*).

2) L'endomorphisme u est-il surjectif ?

3) Montrer que u est injective (<u>Indication</u> : *dériver* $u(f)$).

Exercice 9
Soit $E = \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la dérivation est un endomorphisme de E.

2) Soit $(f_0,\dots,f_n) \in E^{n+1}$ des fonctions fixées. Montrer que l'application suivante est un endomorphisme

$$\forall y \in E \qquad \varphi(y) = y^{(n)} f_n + \cdots + y' f_1 + y f_0$$

3) En déduire que les solutions d'une équation différentielle linéaire $y^{(n)} f_n + \cdots + y' f_1 + y f_0 = 0$ forment un sous-espace vectoriel.

Exercice 10 (interpolation de Lagrange)
Soit $n \geqslant 0$ et $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts.

1) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(a_0),\dots,P(a_n))$ est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

2) En déduire que, pour tout $(b_0,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P tel que $P(a_i) = b_i\ \forall i$.

3) Déterminer explicitement les polynômes L_i tels que $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

4) Montrer que $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées d'un polynôme Q quelconque dans cette base.

Exercice 11 (PT 2009, A extraits)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E fixée. On considère l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathscr{B}$,

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est un projecteur. (Quel est son rang ?)

2) Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 12 (idem)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E fixée. Soit D la droite engendrée par $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et P le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$.

1) Déterminer la matrice M, dans la base $\mathscr{B}$, du projecteur sur P parallèlement à D.

2) Donner la matrice M' de p dans $\mathscr{B}'$, la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, et la formule de changement de base.

Exercice 13 (2011, ENSAM — élève 11)
Soit p et q deux projecteurs tels que $p \circ q = 0$, et $r = p + q - q \circ p$.

1) Montrer que r est un projecteur.

2) Montrer que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

3) Montrer que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

Exercice 14
Soit A, B et C des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & A+C-B \end{pmatrix} = \det(A+C)\det(A-B)$$

Exercice 15 (2011, ENSAM — OT 244)

$$\text{Calculer } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 16
Soit T définie sur $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $T(u) = v$ où $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$.

1) Montrer que T est un endomorphisme de E. Noyau, image.

2) Valeurs propres, sous-espaces propres.

Exercice 17 (ddl)
Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant

$$F \oplus G = F' \oplus G' = E \qquad \text{et} \qquad F' \subset G$$

Montrer

$$F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$$

Solution. A la main : somme directe, puis $= E$. □

Exercice 18 (ddl)
Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB - BA = I_n\,?$$

<u>Indication</u> : *Trace.*

Exercice 19 (ddl)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices vérifiant

$$AB - BA = A$$

Calculer $\operatorname{tr}(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^\star$. Indication : 0

Exercice 20 (ddl)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p avec $n > p$.
On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant

$$u \circ v = \mathrm{Id}_F$$

a) Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.
b) Déterminer son rang, son image et son noyau.