Programme de colle EquaDiff

Classe de PT

Lycée La Martinière

Exercice 1 (ddl, ordre 1)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $y' + 2y = x^2$ **2)** $y' + y = 2\sin x$ **3)** $y' - y = (x+1)\mathrm{e}^x$
4) $y' + y = x - \mathrm{e}^x + \cos x$ **5)** $(x^2+1)y' + xy = 1$ **6)** $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $]-1, 1[$
7) $(\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$

Exercice 2 (Linéaire d'ordre 1, raccords)
On considère l'équation différentielle

$$ty' + (t-1)y = t^2 \tag{1}$$

1) Déterminer l'ensemble des solutions sur chacun des intervalles où Cauchy-Lipschitz s'applique.

2) Déterminer les solutions $\mathscr{C}^1$ de (1) sur $\mathbb{R}$.

3) Tracer quelques courbes intégrales. Que remarque-t-on en $x = 0$? Combien a-t-on de solution satisfaisant $y(0) = 0$?

4) Déterminer les solutions de classe $\mathscr{C}^1$ et solutions développables en série entière de $ty' + (t-2)y = 0$.

Exercice 3 (Linéaires d'ordre 2, cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène)
Résoudre, en cherchant une solution particulière de l'équation homogène (changement de fonction y), les équations différentielles suivantes :

1) $t^2y'' + 4ty' + 2y = \ln(1+t)$, solution particulière de la forme $t \mapsto t^\alpha$.

2) $ty'' + 2y' - ty = 0$, solution particulière développable en série entière.

3) $t^2y'' + t(t+1)y' - y = 0$, solution particulière développable en série entière.

Exercice 4
Résoudre l'équation différentielle $2t(1-t)y'' + (3-5t)y' - y = 0$ en la mettant sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)y' + h(t)y) = 0$.

Exercice 5 (Linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : révisions de sup)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + 2y' + y = te^t$ **2)** $y'' + 4y' + y = \cos(t)e^{-t}$ **3)** $y'' + y' + y = t^2 + e^t$
4) $y'' - 6y' + 9y = e^{3t} + \sin t$ **5)** $y'' + y = \tan^2(t)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Exercice 6 (ddl)
Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions

$$f(x) = \frac{C + x}{1 + x^2}$$

seraient les solutions.

Exercice 7 (ddl)
Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 8 (ddl)
Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle.
On se propose de montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + p(x)y = 0$ s'annulent.
Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.

1) Justifier que f est de signe constant.
Quitte à considérer $-f$ au lieu de f, on peut supposer $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

2) Etudier le signe de f''.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Quelle est l'équation de la tangente à f en a ?

4) Montrer que le graphe de f est en dessous de sa tangente en a.

5) En déduire que $f'(a) = 0$ et conclure.

Exercice 9 (ddl)
Déterminer f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f'(x) = f(2-x)$$

Exercice 10 (ddl)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que pour tout x réel

$$f(x) - 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 11 (ddl)
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \text{ et } f(0) = 1$$

Exercice 12 (ddl)
Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in [0,1]\,, f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 13
On considère trois fonctions u, v et w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} u'(t) & = & -2u(t) & + & 5v(t) & + & 2w(t) \\ v'(t) & = & -u(t) & + & 4v(t) & + & 2w(t) \\ w'(t) & = & 2u(t) & - & 10v(t) & - & 5w(t) \end{array}\right.$$

1) Montrer que le système (S) équivaut à l'équation différentielle matricielle $X'(t) = AX(t)$, où $X(t)$ est un vecteur colonne que l'on précisera.

2) Si $\varphi(t) \in \mathbb{R}^3$ a pour vecteur colonne dans la base canonique $X(t)$, on écrit

$$\varphi(t) = x(t)\varepsilon_1 + y(t)\varepsilon_2 + z(t)\varepsilon_3$$

Donner le système (S_1) d'équations différentielles vérifiées par x, y et z.

3) On suppose que $u(0) = v(0) = 0$ et que $w(0) = 1$; calculer alors $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$.

4) Résoudre (S_1) avec les conditions initiales trouvées à la question précédente.

5) En déduire la solution de (S) vérifiant les conditions initiales $u(0) = v(0) = 0$ et $w(0) = 1$.

Exercice 14
Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -y + \sin(\alpha t) \\ y' & = & x - \cos(\alpha t) \end{array}\right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

2) $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x + y \\ y' & = & y \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x + y - z \\ y' & = & -x + 2y + z \\ z' & = & x + z \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x + 2y - z + t \\ y' & = & 2x + 4y - 2z \\ z' & = & -x - 2y + z \end{array}\right.$