Programme de colle : 1 paramètre, 1 equa diff 2, 1 produit scalaire

Classe de PT

Lycée La Martinière

Exercice 1

1) Montrer que l'application suivante est un produit scalaire de l'espace $E = \mathbb{R}[X]$

$$(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

2) Résoudre $ty'' + 2y' - ty = 0$, solution particulière développable en série entière.

3) Pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ on pose $g(x, t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x, t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2

1) Montrer que l'application suivante est un produit scalaire de l'espace $E = \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R})$

$$(f, g) \mapsto f(a)g(a) + \int_a^b f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

2) Résoudre l'équation différentielle $2t(1 - t)y'' + (3 - 5t)y' - y = 0$ en la mettant sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)y' + h(t)y) = 0$$

3) (ddl)Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est définie et positive sur $]-1, +\infty[$.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa monotonie.
c) Former une relation entre $f(x + 2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
d) On pose pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = xf(x)f(x - 1)$$

Montrer que

$$\forall x > 0, \varphi(x + 1) = \varphi(x)$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
e) Déterminer un équivalent à f en -1^+.

Exercice 3

1) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, les a_i 2 à 2 distincts. Montrer que l'application suivante est un produit scalaire de l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$

$$(P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$$

(alternative : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(0)Q^{(i)}(0)$)

2) (ddl)On pose, pour $x \geqslant 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \frac{1-\cos t}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.

b) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F''(x)$.

c) En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$$