Programme de colle espaces vectoriels normés

Classe de MP*

Lycée du Parc

ATTENTION : cf feuille Séries lors des séries. Et pas de séries avant les séries. Bref.

1 Généralités

Exercice 1
Sur $\mathbb{K}^n$, limite de norme p lorsque $p \to +\infty$ est norme infinie.
Idem sur les fonctions.

Exercice 2 (M-P MP – ddl)
Soit $E = \ell^1(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que $\sum |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à E, on pose $\|a\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

1) (cours) Montrer que $\|\,.\,\|_1$ est une norme sur E.

2) Soit $F = \left\{ a \in E, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$. L'ensemble F est-il ouvert (non) ? fermé (oui) ? borné (non) ?.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $A = \{u \in \ell^1(\mathbb{C}) \mid \forall n\ |u_n| \leqslant \alpha_n\}$. CNS sur α pour que A soit compact.
<u>Indication</u> : *$\alpha \in \ell^1$, par un argument diagonal.*

Solution.

2) Boule, $f^{-1}(1)$ avec f linéaire ad hoc, $a^{(p)} = (p+1, p, 0, \dots)$.

3) Sens direct avec $u^{(k)}$ égal α tronquée en $n = k$. Réciproque en extrayant une sous-suite de chaque $u_n = (u_n^{(k)})_k$, récursivement (on extrait de u_1, puis de $u_2^{\varphi_1}$, etc...). On considère $v_n = u_n^{\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_1}$.

□

Exercice 3 (X MP – ddl)
Caractériser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices dont la classe de similitude est fermée.
Même question avec $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$

Exercice 4 (ddl)
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Existe-t-il une norme $\|\,.\,\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \|A\| = \left\|P^{-1}AP\right\|$$

<u>Indication</u> : *Regarder $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = 2A$.*

Exercice 5 (Centrale MP – ddl)
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme : $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :
$A = \{\text{suites croissantes}\}$, $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$, $C = \{\text{suites convergentes}\}$,
$D = \{\text{suites admettant 0 pour valeur d'adhérence}\}$ et $E = \{\text{suites périodiques}\}$.

Exercice 6 (ddl)
Soient A une partie bornée non vide d'un espace vectoriel normé (E, N) et $\mathcal{L}$ le sous-espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E.
a) Montrer que les éléments $\mathcal{L}$ sont des fonctions bornées.
b) Pour $f \in \mathcal{L}$, soit
$$K_f = \left\{k \in \mathbb{R}^+ / \forall (x,y) \in A^2, N(f(x) - f(y)) \leqslant kN(x-y)\right\}$$
Justifier l'existence de $c(f) = \inf K_f$ puis montrer $c(f) \in K_f$.
c) Soient $a \in A$ et $N_a : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^+$ définie par
$$N_a(f) = c(f) + N(f(a))$$
Montrer que N_a est une norme sur $\mathcal{L}$.
d) Soient $a, b \in A$. Montrer que les normes N_a et N_b sont équivalentes

Exercice 7 (ddl)
On note $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées normé par $\| \,.\, \|_\infty$.
a) Soit $a = (a_n)$ une suite réelle. Former une condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que l'application
$$N_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, |x_n|$$
définisse une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Indication : $a \in \ell^1(\mathbb{R})$.
b) Comparer N_a et $\| \,.\, \|_\infty$. Indication : $N_a(x) \leqslant \|a\|_1 \|x\|_\infty$

Exercice 8 (normes dans les polynômes)
1) Construire deux normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}[X]$ telles que

 1) $X^n \to 0$ pour N_1. 2) $\|X^n\| \to +\infty$ pour N_2.

 Que peut-on en déduire ?
2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Construire une norme N telle que $N(X^n - P) \to 0$.

Solution.
1) $N_1(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n}$ et $N_2(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} n|a_n|$
2) Soit $Q_n = X^n$ pour $n \leqslant \deg P$ et $Q_n = X^n - P$ pour $n > \deg P$. La famille (Q_n) est une base, et on définit N comme N_1 mais dans la base Q_n. Donc $N(Q_n) = \dfrac{1}{n}$.

□

Exercice 9 (ddl)
Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :
$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$
a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Etudier la convergence de la suite de terme général
$$P_n = \frac{1}{n} X^n$$
pour l'une et l'autre norme.
c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 10 (ddl)
On norme l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|\,.\,\|_\infty$.
Déterminer la distance de la suite $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ des suites réelles convergentes.
Indication : $d(u,C) = 1$.

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, continue. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^m$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que (u_n) n'a qu'une valeur d'adhérence implique (u_n) converge.

Solution. Soit y cette valeur d'adhérence, regarder le compact $B = f(B_F(y,\varepsilon)) - B(y,\varepsilon)$, qui sera non vide sinon par récurrence (u_n) resterait dans $B(y,\varepsilon)$ pour n assez grand. Montrer qu'il existe une infinité de u_n dedans. La compacité entraîne l'existence d'une deuxième valeur propre. □

Exercice 12
Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé. Soit $p : E \to E/F$ la projection canonique. On munit E/F de $\|\bar{x}\|' = \inf(\{\|y\| \mid y \in \bar{x}\}) = \inf\{\|y\| \mid y \in x + F\}$.

1) Montrer que $(E/F, \|.\|')$ est un espace vectoriel normé, puis que p est $\mathscr{C}^0$.

2) En déduire

- **a)** Pour tout F sous-espace vectoriel fermé et G de dimension finie, $F + G$ est fermé.
- **b)** Pour tout $\varphi : E \to \mathbb{R}$ linéaire, φ $\mathscr{C}^0$ si et seulement si Ker φ fermé.

Exercice 13 (X 2011, OT)
Soit $A \subset \mathbb{C}$. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose

$$P_{n,A} = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg P = n,\ P \text{ unitaire et ses racines sont dans } A\}$$

1) Minorer $\{|P(z)|, P \in P_{n,A}\}$ pour $z \notin A$ fixé. Déterminer la borne inférieure.

2) Pour n fixé, on muni $\mathbb{C}_n[X]$ d'une norme (elles sont toutes équivalentes). Montrer que A fermé entraîne $P_{n,A}$ fermé.

3) Que dire de $P_{n,A}$ si A est compact ? si A est ouverte ?

Solution.

1) Soit $m = \inf\{|z-a| \mid a \in A\} = d(z,A)$. Pour tout $P \in P_{n,A}$, $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$, avec $a_k \in A$.

Donc $|P(z)| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}|z - a_k| \geqslant m^n$. Minorant : $\boxed{d(z,A)^n}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit $a_k \in A$ tel que $m \leqslant |z - a_k| \leqslant m + \dfrac{1}{k}$ et $P_k = (X - a_k)^n$ (par définition de la borne inférieure). $P_k \in P_{n,A}$ et $|P_k(z)| \to m^n$ par construction.

2)

□

2 Applications linéaires continues

Exercice 14
Soit f, $g \in \mathscr{L}_c(E)$. Montrer que $f \circ g - g \circ f \neq \mathrm{id}_E$.

Solution. Par récurrence, $f^n g - g f^n = n f^{n-1}$. Puis en passant aux normes triples, $\|f^n\| \leqslant \dfrac{2}{n}\|f\|\|g\|\|f^n\|$ donc $\|f^n\| = 0$, puis $f^n = 0$. En remontant, $f = 0$, absurde. □

Exercice 15 (D'après M-P)
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_A = \sup_A |P|$.

1) CNS sur A pour que $\|.\|_A$ soit une norme.

2) On suppose désormais A infini et bornée. Montrer que $\|.\|_{\overline{A}} = \|.\|_A$.

3) On suppose désormais A fermée. CNS sur A pour que $P \mapsto P(0)$ soit continue.

Solution.

1) A bornée (sinon le sup n'existe pas forcément) et infini (sinon pas défini pour P de degré assez grand).

2) Une inégalité immédiate, l'autre en prenant une suite a_n qui tends vers le point de $\overline{A}$ où le sup est atteint.

3) $0 \in A$. Considérer les polynômes $P_n = \dfrac{2}{(\max A)^2 - (\min A)^2}(X^2 - \dfrac{(\max A)^2 + (\min A)^2}{2})^n$.

□

Exercice 16 (X MP)
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $\varphi \in \mathscr{L}_c(E, \mathbb{K})$ non nulle. Montrer que

$$\forall x \in E \qquad d(x, \text{Ker } \varphi) = \frac{|\varphi(x)|}{|||\varphi|||}$$

Solution. $E = \text{Ker } \varphi \oplus \mathbb{K}e$, où l'on peut choisir $e \in E$ tel que $\varphi(e) = 1$.
Si $x = \lambda e + y$ la décomposition de $x \in E$, $d(x, \text{Ker } \varphi) = d(\lambda e, \text{Ker } \varphi) = |\lambda| d(e, \text{Ker } \varphi)$.
De plus, $\|e - (-y/\lambda)\| \geqslant d(e, \text{Ker } \varphi)$, puis $\dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \dfrac{|\varphi(e)|}{\|e + y/\lambda\|} \leqslant \dfrac{|\varphi(e)|}{d(e, \text{Ker } \varphi)}$. En passant au sup, $|||\varphi||| \leqslant \dfrac{|\varphi(e)|}{d(e, \text{Ker } \varphi)}$.
Et $|||\varphi||| \geqslant \dfrac{|\varphi(e - y)|}{\|e - y\|}$. □

Exercice 17
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, E espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que $\exp u$ est un polynôme en u.
(ddl - M-P MP) Soient d un entier naturel et (f_n) une suite de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus d. On suppose que cette suite converge simplement. Montrer que la limite est polynomiale de degré au plus d, la convergence étant uniforme sur tout segment.

Exercice 18
Soit u un endomorphisme continu d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), |\lambda| \leqslant \|u\|$$

Exercice 19 (ddl)
On note $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme N_∞. Pour $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ on pose $T(u)$ et $\Delta(u)$ les suites définies par

$$T(u)_n = u_{n+1} \text{ et } \Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

a) Montrer que les applications T et Δ sont des endomorphismes continus de E.
b) Calculer leur norme.

Exercice 20
Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach (i.e. une algèbre qui est aussi un evn complet, et telle que $\|uv\| \leqslant \|u\|\|v\|$). Par exemple $\mathscr{A} = \mathscr{L}(E)$ les applications linéaires continues de E dans E munie de la norme triple et de la composition.

1) Montrer que $\mathrm{id} - u$ est inversible pour u assez petit.

2) En déduire que $\mathscr{A}^*$ est ouvert.

3) Avec $\mathscr{A} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|.\|_2$, montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert.

4) Montrer que les idéaux maximaux de $\mathscr{A}$ sont fermés.

Exercice 21 (ddl — trop d'analyse)
Soient $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

a) Montrer que $\|\,.\,\|_\varphi$ est une norme sur E
b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.
c) Les normes $\|\,.\,\|_x$ et $\|\,.\,\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?