Programme de colle Probabilités

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1 (ddl)
Soient A, B deux parties d'un ensemble Ω fini vérifiant

$$A \cap B \neq \emptyset,\ A \cap \bar{B} \neq \emptyset,\ \bar{A} \cap B \neq \emptyset \text{ et } \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$$

A quelle condition sur $(a, b, c, d) \in]0, 1[^4$ existe-t-il une probabilité P sur Ω vérifiant

$$P(A \mid B) = a,\ P(A \mid \bar{B}) = b,\ P(B \mid A) = c \text{ et } P(B \mid \bar{A}) = d\,?$$

Solution. On pose $x = P(A \cap B)$ etc. Alors $x + y + z + t = 1$, et x, etc positifs. Inversement, on peut construire P étant donnés x, y, z, et t arbitraires ad hoc (on a une partition de Ω).

Après injection dans les conditions à base de a, b etc, on a $\left\{\begin{array}{rcl} (1-a)x - az & = & 0 \\ bx + y + bz & = & b \\ (1-c)x - cy & = & 0 \\ dx + dy + z & = & d \end{array}\right.$

Finalement, il existe une probabilité telle que voulue si, et seulement si, $ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$.
□

Exercice 2 (ddl – modélisation)
On dispose r boules à l'intérieur de n urnes (avec $r \leqslant n$), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules. Les répartitions possibles sont équiprobables.
a) Déterminer la probabilité de l'évènement :

A : « chaque urne contient au plus une boule »

b) Déterminer la probabilité de l'évènement :

B : « il existe une urne contenant au moins deux boules »

Solution. Une répartition est une application de $[\![1, r]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$: il y en a n^r. Une répartition vérifiant A est une application injective. D'où $P(A)$.
$P(B) = 1 - P(A)$ □

Exercice 3 (ddl)
On se donne $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne de numéro k contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.
a) Quelle est la probabilité que $(n + 1)$-ième boule tirées soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes ?
b) Que de vient cette probabilité lorsque $N \to +\infty$?

Solution. a) Dans l'urne d'indice k, la probabilité de tirer une boule blanche vaut k/N.
Dans cette même urne, la probabilité de tirer une succession de n boules blanches vaut $(k/N)^n$.
Par la formule des probabilités totales, la probabilité qu'après choix d'une urne, nous tirions une succession de n boules blanches vaut $\pi_n = \dfrac{1}{N+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Notons A_k l'événement, la boule tirée lors du k-ième tirage est une boule blanche. La probabilité conditionnelle cherchée vaut

$$P(A_{n+1} \mid A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \frac{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1})}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)} = \frac{\pi_{n+1}}{\pi_n}$$

b) Somme de Riemann, $\pi_n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$. Conclusion. □

Exercice 4 (ddl)
Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On tire de celle-ci une boule, on note sa couleur et on la remet accompagnée de d boules de la même couleur. On répète l'expérience à l'envi.
Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n-ième tirage.

Solution. p_n la proba. $p_1 = \frac{b}{b+r}$, $p_2 = \frac{b}{b+r+d}\frac{r}{b+r} + \frac{b+d}{b+r+d}\frac{b}{b+r} = \frac{b}{b+r}$. Puis récurrence forte : La probabilité de tirer une boule blanche au $n+1$-ième tirage sachant que k boules blanches ont déjà été tirées vaut $\frac{b+dk}{b+r+nd}$. Formule des probas totales :

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b+dk}{b+r+nd} \Big(\frac{b}{b+r}\Big)^k \Big(\frac{r}{b+r}\Big)^{n-k}$$

Avec le classique $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, on a

$$p_n = \frac{1}{b+r+nd}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b \Big(\frac{b}{b+r}\Big)^k \Big(\frac{r}{b+r}\Big)^{n-k} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{bnd}{b+r}\Big(\frac{b}{b+r}\Big)^j\Big(\frac{r}{b+r}\Big)^{n-1-j}\right)$$

Puis la formule du binôme. □

Exercice 5 (ddl)
Une succession d'individus $A_1, \ldots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui »ou « non ».
Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçu par A_n soit identique à celle émise par A_1.
On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Solution. p_n la proba. $p_1 = 1$, $p_2 = p$, $p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n)$. □

Exercice 6 (ddl)
Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. Etablir

$$E\left(X\right)^2 \leqslant E\left(X^2\right)$$

Solution. Cauchy-Schwarz. □

Exercice 7 (ddl)
Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre $p \in \left]0,1\right[$.
Calculer l'espérance de la variable

$$Y = \frac{1}{X+1}$$

Solution. Avec le classique $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. $E(Y) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$. $\square$

Exercice 8 (ddl)
Dans cet exercice, les variables aléatoires sont toutes supposées prendre leurs valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire X l'application $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi_X(u) = E\left(\mathrm{e}^{iuX}\right)$$

a) Vérifier que φ_X est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Calculer $\varphi_X(0)$. Comment interpréter $\varphi_X'(0)$ et $\varphi_X''(0)$?
b) Calculer la fonction caractéristique d'une variable X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
Même question avec une loi binomiale de paramètres n et p.
c) Soient X une variable aléatoire réelle et x_0 un entier. Vérifier

$$P(X = x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\mathrm{e}^{-iux_0}\,\mathrm{d}u$$

En déduire

$$\varphi_X = \varphi_Y \Rightarrow X = Y$$

d) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Vérifier

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$$

e) Exploiter ce résultat pour retrouver la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Exercice 9
TODO : vieux exos ECE, marches aléatoires r. cerf.

Solution.

$\square$