Programme de colle Matrices

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1
Soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et H un supplémentaire de Ker f dans E.

1) Montrer que l'application $\widetilde{f} : H \to f(E)$ définie par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ est un isomorphisme (<u>Indication</u> : *on pourra commencer par montrer la linéarité, puis l'injectivité, et la surjectivité*).

2) On suppose désormais E et E' de dimensions finies respectives p et n. Trouver des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E et E' pour que la matrice de f dans ces bases soit la plus simple possible.

3) (Chapitre suivant) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. <u>Indication</u> : *Utiliser les questions 1 et 2.*

- **a)** Montrer que $M = PJ_rQ$ avec P et Q des matrices inversibles et $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.
- **b)** Montrer que $M = P'I_rQ'$ avec $P' \in \mathscr{M}_{n,r}$ et $Q' \in \mathscr{M}_{r,n}$ deux matrices de rang maximal possible (que l'on précisera).

Exercice 2 (factorisation)
Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(E, G)$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v) \iff \exists w \in \mathscr{L}(F, G) \quad v = w \circ u$$

1) On suppose qu'il existe $w \in \mathscr{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$.

2) On suppose $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$.
On s'appuie sur les résultats de l'exercice 1 : On note H un supplémentaire de Ker u dans E, et $\widetilde{u} : H \to \mathrm{Im}\ u$ l'isomorphisme obtenu en restreignant u. Notons $p_H \in \mathscr{L}(E)$ la projection sur H parallèlement à Ker u et $p_{\mathrm{Im}\ u} \in \mathscr{L}(F)$ une projection sur Im u.
Construire w qui vérifie $v = w \circ u$.

Exercice 3
Idéaux bilatères de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution.

1) Si $M \neq 0$ est dans $\mathscr{I}$ on peut promener le coefficient non nul partout à l'aide de matrices élémentaires (et par exemple obtenir I_n).

2) Les endomorphismes de rang fini forment un idéal différent de $\{0\}$ et de $\mathscr{L}(E)$.

□

Exercice 4
A de rang 1, montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}\,(A)A$.

Solution. Si A est de rang 1, alors ses colonnes forment une famille de rang 1, c'est à dire qu'elles s'expriment toutes en fonction d'un même vecteur colonne U : $\exists U, V \in (\mathbb{R}^n)^2\ A = U\,{}^tV$. Par conséquent $A^2 = U\,{}^tVU\,{}^tV = U(\mathrm{Tr}\ A)\,{}^tV = (\mathrm{Tr}\ A)A$. □

Exercice 5
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 0$. On note $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'application définie par

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad f(M) = \mathrm{Tr}\,(A)M - \mathrm{Tr}\,(M)A$$

1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$.

2) Déterminer le noyau et l'image de f.

Solution.

1) L'application Tr est linéaire, de même que le produit externe.

2) On remarque que $f(A) = 0$. Donc $\mathrm{Vect}\,(A) \subset \mathrm{Ker}\, f$. De plus $f(M) = 0$ implique $M = (\mathrm{Tr}\,(M)/\,\mathrm{Tr}\,(A))\,A$ par conséquent $M \in \mathrm{Vect}\,(A)$. D'où $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Vect}\,(A)$, et en conclusion $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\,(A)$.
$\mathrm{Tr}\; f(M) = 0$, donc $\mathrm{Im}\, f$ est inclue dans le noyau de la forme linéaire Tr. De plus, par la formule du rang, $\mathrm{Im}\, f$ est de codimension 1, ce qui nous donne l'égalité : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Tr}^{-1}(0)$.

□

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotente d'ordre n.

1) Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$, montrer que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ forme une base de E.

2) Déterminer la matrice de u dans cette base.

3) En déduire que
$$\{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$$

Solution.

1) Par l'absurde, on suppose la famille liée. Si i_0 est le plus petit indice tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$, on compose par u^{n-i_0-1} dans l'égalité $u^{i_0}(x) = 1/\lambda_{i_0} \displaystyle\sum_{i>i_0} \lambda_i u^i(x)$, ce qui nous donne $u^{n-1}(x) = 0$, donc une contradiction.

2) Pour $i < n$, $u(e_i) = e_{i+1}$, et $u(e_n) = 0$.

□

Exercice 7
Calculer la puissance k-ième de la matrice de taille $n+1$ de terme général $\left(\binom{j}{i}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Solution. Les coefficients binomiaux font penser au développement d'une puissance, on se place donc sur $\mathbb{R}_n[X]$, et on considère l'application $P(X) \mapsto P(X+1)$ dans la base canonique. □

Exercice 8

1) Montrer que toute forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $N \mapsto \mathrm{Tr}\,(MN)$ où M est une matrice uniquement déterminée.

2) Quelles sont les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $f(AB) = f(BA)$?

3) (suite de la première question) Si $n \geqslant 2$, montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$.

Solution.

1) L'application $\theta : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$ définie par $\theta(M) = (N \mapsto \mathrm{Tr}\,(MN))$ est injective — il suffit de tester sur la base canonique $(E_{i,j})_{i,j}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$, par conséquent θ est bijective.

2) Notons $M = \theta^{-1}(f)$. Pour toutes matrices A, B, nous avons $\mathrm{Tr}\,(MAB) = \mathrm{Tr}\,(MBA)$. Par conséquent $\mathrm{Tr}\,((BM - MB)A) = 0$. Ce qui entraîne $BM - MB = 0$ pour tout B. La matrice M commute à toutes les matrices, c'est une homothétie. Réciproquement, les formes linéaires de la forme $f = \lambda\,\mathrm{Tr}$ conviennent.

3) L'hyperplan correspond à une matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$, avec pour équation $\mathrm{Tr}\,(AM) = 0$. Quitte à changer de base au départ et à l'arrivée, on peut supposer que $A = J_r$, il reste à trouver M qui convienne.

□

Exercice 9
Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ une application linéaire non constante. On suppose de plus que, pour tout couple de matrices (A, B), $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer qu'une matrice M est inversible si et seulement si $f(M) \neq 0$.

Solution. f est un morphisme non nul compatible avec la multiplication, par conséquent $f(I_n)$ et $f(0)$ valent 0 ou1. Après étude, $f(0) = 0$ et $f(I_n) = 1$.
Si M est inversible, $f(MM^{-1}) = f(M)f(M^{-1}) = f(I_n) = 1$, donc $f(M) \neq 0$.
Réciproquement, si M non inversible, quitte à multiplier à droite par une matrice inversible (opération sur les colonnes) on peut supposer que la dernière colonne de M est nulle. Soit P_i la matrice qui permute la i-ème et la dernière colonne de M. Alors

$$f(M^n) = \lambda f(\prod_{i=1}^{n} MP_i) = \lambda f(0) = 0$$

Donc $f(M) = 0$. □

Exercice 10
Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension n et $G = \{f_i \in \mathscr{L}(E) \mid 1 \leqslant i \leqslant p\}$ un ensemble d'applications linéaires inversibles stable pour la composition (donc un sous-groupe de $GL(E)$). Prouver que $\mathrm{Tr}\,(\sum_{i=1}^{p} f_i) = 0\ [p]$.

Solution. Il faut connaître le théorème des noyaux :

$$\forall P, Q \in \mathbf{k}[X]\ \forall u \in \mathscr{L}(E) \qquad P \wedge Q = 1 \Longrightarrow \mathrm{Ker}\ P(u)Q(u) = \mathrm{Ker}\ P(u) \oplus \mathrm{Ker}\ Q(u)$$

Notons $f = \sum_{i=1}^{p} f_i$. Nous avons le résultat classique, $f_i f = \sum f_i f_j = \sum f_k = f$, puisque $G =$ est un groupe.
En sommant sur i, l'égalité précédente s'écrit $f^2 = pf$. C'est-à-dire $f(f - p\,\mathrm{id}\,) = 0$. Par conséquent dans une base de la somme directe $\mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Ker}\,(f - p\,\mathrm{id}\,)$, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & p & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & p \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne le résultat voulu. □

Exercice 11

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout i, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout i, $\sum_{j} |a_{i,j}| < 1$. Montrer que l'équation $X = AX + B$, où $B \in \mathbb{C}^n$ est fixé, admet une solution unique.

3) Soit P une matrice stochastique — c'est-à-dire une matrice réelle à coefficients positifs vérifiant $\forall i\ \sum_{j} p_{i,j} = 1$. Montrer que $\sup\{\lambda \mid (P - \lambda I_n)$ n'est pas inversible$\} = 1$ et que ce sup est atteint.
Montrer que les puissances d'une matrice stochastique sont stochastiques.

Solution.

1) Raisonnons par l'absurde, soit $X \in \operatorname{Ker} A$ non nul et soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max_i(|x_i|)$. $AX = 0$, par conséquent $\forall i, \sum_j a_{i,j}x_j = 0$. On isole $a_{i,i}$ et on passe aux valeurs absolues : $|a_{i,i}||x_i| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}||x_j|$. En particulier en $i = i_0$, $|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}||x_{i_0}|$. Puisque, par construction, $|x_{i_0}| \neq 0$, l'inégalité se simplifie en $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$ ce qui est contradictoire.
2) Nous cherchons à montrer que $I_n - A$ est inversible. L'hypothèse de l'énoncé peut s'écrire $1 - |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ (donc $1 - |a_{i,i}| \geqslant 0$). Or $|1 - a_{i,i}| > |1 - |a_{i,i}|| = 1 - |a_{i,i}|$. Par conséquent on peut appliquer le résultat de la question précédente.
3) C'est encore une fois un raisonnement du même type. Pour montrer qu'une puissance est toujours stochastique, il suffit de l'écrire et d'inverser deux sommes.

□

Exercice 12
Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Résoudre $X + {}^tX = \operatorname{Tr}(X)A$.

Solution. Discuter selon la valeur de $\operatorname{Tr}(X)$. Si $\operatorname{Tr}(X) \neq 0$, se ramener au cas précédent. □

Exercice 13
Soit p un nombre premier et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

1) Montrer que $\operatorname{Tr}((A + B)^p) = \operatorname{Tr}(A^p) + \operatorname{Tr}(B^p)[p]$.
2) En déduire $\operatorname{Tr}(A^p) = \operatorname{Tr}(A)[p]$.
3) Soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$.
   Montrer que p divise u_p pour tout p premier.

Solution.

1) Binôme de Newton, vu que la trace permet de permuter.
2) $A = L + D + U$ avec L strictement triangulaire inférieure, D diag, etc.
3) Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et A la matrice de la relation de récurrence. $u_n = \operatorname{Tr} A^n$.

□

Exercice 14
On note G le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Z})$ (matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$) de la forme $I - 2E_{ii}$ et $I + aE_{ij}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $i \neq j$.
On note $\mathscr{R}$ la relation $A\mathscr{R}B \iff \exists P, Q \in G\ A = PBQ$

1) Montrer que $G \subset GL_n(\mathbb{Z})$ et que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, $A \neq 0$. On pose
$$d(A) = \min\{|a_{ij}| \mid a_{ij} \neq 0\}$$
   Montrer que, pour tout $A \neq 0$, il existe B dans la classe de A (pour $\mathscr{R}$) telle que $d(B)$ soit minimal dans cette classe et que $d(B) = b_{11}$.
3) Montrer que b_{11} divise les b_{1i} puis les b_{ij}.
4) Montrer que l'on peut trouver B de forme diagonale avec $b_{ii}|b_{i+1,i+1}$ positifs ou nuls.

5) Montrer que $G = GL_n(\mathbb{Z})$ (avec le déterminant)

Solution.

1)

2) $B \neq 0$ donc pas de problème de définition de $d(B)$, et $\{d(B) \mid B \in \bar{A}\} \subset \mathbb{N}$ donc a un plus petit élément. Par des opérations sur les lignes et les colonnes, on amène $d(B)$ en haut à gauche.

3) Effectuer la division euclidienne de b_{1i} par b_{11} puis la traduire en opération élémentaire. Nécessairement $r = 0$, par minimalité de b_{11}.

4) Ci-dessus plus rec, calcul bloc.

5) Soit $A \in GL_n(\mathbb{Z})$. $\det(A) = \pm 1$ (résultat classique) et $\det B = \pm \det(A)$.
Or $\det B = \prod b_{ii}$, donc $b_{ii} = 1$ pour tout i : $B = I$. Comme $B = PAQ$, $A = P^{-1} I Q^{-1} \in G$.

□

Exercice 15
Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie, $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que rg $g \leqslant$ rg f si et seulement si il existe $h \in GL(E)$ et $k \in \mathscr{L}(E)$ tels que $h \circ g = f \circ k$.

Solution. L'écrire $g = h^{-1} f k$, et remarquer que rg $AB \leqslant rgA$ (via les applications linéaires). □

Exercice 16 (ddl)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
b) Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
c) En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 17 (ddl)
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore une matrice symétrique.

Exercice 18 (ddl)
Soit A et B deux matrices carrées d'ordre 3 telles que $AB = O_3$.
Montrer que l'une au moins de ces matrices est de rang inférieur ou égal à 1.