# Programme de colle Groupes

Classe de MPSI

Lycée du Parc

**Exercice 1**
On pose $G = \mathbb{Q} - \{-1\}$ et on définit sur $G$ la loi $\star$ par $a \star b = a + ab + b$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{Q}^*, .)$. Est-il commutatif ? Pour $a \in G$, calculer $a^n = a \star \cdots \star a$.

**Exercice 2**
Soit $G_1$ et $G_2$ deux sous-groupes, montrer que

$$G_1 \cup G_2 \text{ sous-groupe de } G \Longrightarrow (G_1 \subset G_2) \text{ ou } (G_2 \subset G_1)$$

**Exercice 3 (lemme des 5)**
Soit $G_1 \to G_2 \to G_3 \to G_4 \to G_5$ une suite exacte : les $G_i$ sont des groupes, et $u_i : G_i \to G_{i+1}$ des morphismes de groupes, avec $\mathrm{Im}\ u_i = \mathrm{Ker}\ u_{i+1}$.
Soit $H_1 \to H_2 \to H_3 \to H_4 \to H_5$ avec $v_i : H_i \to H_{i+1}$ une deuxième suite exacte, et $f_i : G_i \to H_i$ des morphismes tels que le diagramme commute : $v_i \circ f_i = f_{i+1} \circ u_i$.
On suppose $f_2$ et $f_4$ surjectives, et $f_5$ injective. Montrer que $f_3$ est surjective.
On suppose $f_2$ et $f_4$ injectives, et $f_1$ surjective. Montrer que $f_3$ est injective.

**Exercice 4**
Soient $H$ et $K$ des sous-groupes d'un groupe $G$. On note $HK = \{h.k \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$. Montrer que $HK$ est un sous-groupe de $G$ si et seulement si $HK = KH$.

**Solution.** Sens direct : Soit $h.k \in HK$, qui est un sous-groupe, donc il existe $h' \in H$ et $k' \in K$ tels que $hkh'k' = 1$. En multipliant par $k'^{-1}h'^{-1}$ à droite, on trouve $hk = k'^{-1}h'^{-1} \in KH$. Donc $HK \subset KH$. Par une démarche analogue (mais non symétrique !), on a l'inclusion réciproque.
Réciproquement, si $h_1.k_1$ et $h_2.k_2 \in HK$, il existe $h \in H$ et $k \in K$ tels que $hk = k_1.k_2^{-1}h_2^{-1}$. Alors $h_1k_1.k_2^{-1}h_2^{-1} = (h_1h)k \in HK$. □

**Exercice 5 (ddl)**
Soit $H$ un sous-groupe strict d'un groupe $(G, \star)$. Déterminer le groupe engendré par le complémentaire de $H$ dans $G$.

**Indication :** Montrer que $\langle K \rangle = G$. (Il manque seulement $H$). □

**Exercice 6**
Soit $E$ un ensemble fini, muni d'une loi de composition interne $\star$ associative. Tous les éléments sont réguliers à gauche ($xa = xb \Rightarrow a = b$) et à droite ($ax = bx \Rightarrow a = b$).

**1)** Soit $a \in E$. Notons $s_a : E \to E$ définie par $s_a(x) = a \star x$. Montrer que $s_a$ est bijective.

**2)** Montrer que $\forall (a, x) \in E^2\ \exists p_0 \in \mathbb{N}^*\ a^{p_0}x = x$.

**3)** Montrer qu'il existe $p$ tel que $a^p$ soit un éléments neutre à gauche de $E$.

**4)** Montrer que $a^p$ est l'élément neutre de $E$.

**5)** Montrer que $(E, \star)$ est un groupe.

**Solution.** □

**Exercice 7 (ddl)**
Soit $(G,.)$ un groupe de cardinal $2n$.
a) Justifier que l'on définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $G$ en posant

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = y^{-1}$$

b) En déduire l'existence dans $G$ d'un élément d'ordre 2.

**Indication :** a) L'écrire.
b) Décrire les orbites, regarder celle de l'identité, compter. $\square$

**Exercice 8 (ddl, X)**
Soit $G$ un groupe multiplicatif de cardinal $p^\alpha$ avec $p$ premier et $\alpha \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer que

$$Z(G) \neq \{1\}$$

**Indication :** Action : $x \mapsto gxg^{-1}$. Burnside. $\square$

**Exercice 9**
Un sous-groupe $H$ de $(G,.)$ est dit distingué si

$$\forall x \in H, \forall a \in G, axa^{-1} \in H$$

**1)** Notons $p : G \to G/H$ la projection et $K$ un sous-groupe de $G$ tel que $p(K) = G/H$ et $|K| = |G/H|$. Montrer que $H \cap K = \{1\}$.

**2)** Soient $H, K$ deux sous-groupes de $(G,.)$. On suppose le sous-groupe $H$ distingué, montrer que l'ensemble

$$HK = \{xy \mid x \in H, y \in K\}$$

est un sous-groupe de $(G,.)$.

**3)** Sous les hypothèses du 1, montrer que $G = HK$.

**4)** On note $D(G) = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid (x,y) \in G^2\}$. Montrer que c'est un sous-groupe distingué.

**5)** Montrer que $D(G)$ est le plus petit sous-groupe qui « rend » $G$ abélien : pour tout $u : G \to A$, avec $A$ un groupe abélien, montrer qu'il existe $\bar{u}$ telle que $u : G \xrightarrow{p} G/D(G) \xrightarrow{\bar{u}} A$.

**Indication :** d) produit semi-direct. Par l'absurde ($h \in H \cap K$ vérifie $p(h) = \bar{1}$, s'il y en a 2 problème de cardinal, car $p_{|K}$ bijective). Regarder le noyau de $\varphi : H \times K \to G$. $\square$