Programme de colle Euclidiens

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $(A|B) = \mathrm{Tr}\,({}^t AB)$ est un produit scalaire.

2) Montrer que $\forall A, B$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

3) $I - A$ inversible si $\|A\| < 1$.

4) Montrer que les inversibles d'une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathscr{A}$ normée complète forment un ouvert.

Exercice 2
Soit E un ensemble fini de cardinal n, R une relation d'équivalence ayant r classes d'équivalences, et $m = \mathrm{card}\{(i,j)/iRj\}$. Montrer que $n^2 \leqslant mr$.

Solution. C-S $\square$

Exercice 3
E euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $(f(x)|x) = 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$.

Solution. Écrire la relation pour $x + y$, et en déduire que $(f(x)|y) = -(x|f(y))$. $\square$

Exercice 4 (vecteurs qui se tournent le dos)
Montrer que, si dans E euclidien, on peut trouver n vecteurs tels que $\forall i \neq j, (v_i|v_j) < 0$, alors $\dim E \geqslant n-1$.

Solution. Pour $n = 1$, la propriété est vraie ($\forall (i,j) \in \emptyset$).
Supposons la propriété vraie au rang n, et $(v_1, \dots, v_{n+1})$ qui vérifient $\forall i \neq j, (v_i|v_j) < 0$.
Soit $F = v_{n+1}^\perp$ et $v_i = u_i + \lambda_i v_{n+1}$. Comme $(v_i|v_{n+1}) < 0$, $\lambda_i < 0$, puis $(u_i|u_j) < 0$ et par rec $\dim F \geqslant n-1$.
$\square$

Exercice 5
Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et p une fonction à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux définie sur I (généralisable aux intégrales impropres).
On pose, pour tout $(P, Q) \in (R[X])^2$, $(P|Q) = \displaystyle\int_I P(t)Q(t)p(t)\,\mathrm{d}t$. Soient P_n les polynômes obtenus en appliquant Gram-Schmidt à la base des X^n.

1) Montrer que P_n a toutes ses racines dans I°, l'intérieur de I, et qu'elles sont toutes simples.

2) Trouver deux suites réelles λ_n et μ_n telles que $P_n = (x + \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$. Vérifier que $\mu_n > 0$.

3) Montrer alors (par récurrence) que P_n et P_{n-1} n'ont pas de racines communes.

4) Montrer enfin (toujours par récurrence) que les racines de P_n et celles de P_{n-1} sont entrelacées.

Solution.

1) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n$: P_n a toutes ses racines dans I°, l'intérieur de I, et elles sont toutes simples.
- $\underline{\mathcal{H}_0}$: P_0, qui constant, a toute ses racines dans I°.

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
  Par construction, $\deg P_{n+1} = n+1$ et $P_{n+1} \perp \mathbb{R}_n[X]$. Si P_{n+1} ne change que $k \leqslant n$ fois de signe sur I°, en x_i, soit $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - x_i) \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors PQ est de signe constant et $(P|Q) = 0$, ce qui est absurde.
  Donc P_{n+1} change de signe $n+1$ fois dans I°, par conséquent a $n+1$ racines distinctes, simples pour des raisons de degré.
  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion.

2)

3) D'après ci-dessus, si $P_n(\alpha) = P_{n-1}(\alpha) = 0$, comme $\mu_n \neq 0$, $P_{n-2}(\alpha) = 0$. Par récurrence, $P_0(\alpha) = 0$, ce qui est absurde.

4) Montrer enfin (toujours par récurrence) que les racines de P et celles de P_{n-1} sont entrelacées.

$\square$

Exercice 6

Soit r la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé et orienté par un vecteur unitaire e et d'angle θ.

1) Montrer que $r(x) = x + (\sin\theta)\ e \wedge x + (1 - \cos\theta)\ e \wedge (e \wedge x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

2) On suppose que r n'est pas une symétrie, et l'on note $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ et $e' = te$. Montrer que

$$r(x) = x + \frac{2}{1 + \|e'\|^2}\ e' \wedge (x + e' \wedge x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. (formule de Rodrigues)

Exercice 7 (ddl)

Soient n un entier supérieur à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

a) Montrer que

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur E.

b) Calculer

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(t^3 - (at^2 + bt + c)\right)^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8 (ddl – Déterminant de Gram)

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.

On note

$$G(x_1, \ldots, x_n) = ((x_i \mid x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

a) Montrer que si $(x_1, ..., x_n)$ est liée alors

$$\det G(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

b) On suppose désormais que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre et on pose

$$F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$$

On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de F.

Exprimer $G(x_1, \ldots, x_n)$ en fonction de M et de ${}^tM$. En déduire que

$$\det G(x_1, \ldots, x_n) > 0$$

c) On introduit de plus $x \in E$. Montrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, x_1, \ldots, x_n)}{\det G(x_1, \ldots, x_n)}}$$

Exercice 9 (ddl)
Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que la projection p est orthogonale si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

Exercice 10
Soit $M = (a_{ij})$ une matrice orthogonale. Montrer que $|a_{ij}| \leqslant 1$ et que $\sum_{ij} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}$.

Solution. Soit C_i la i-ème colonne de M. $\|C_i\| = 1$ entraîne $|a_{ij}| \leqslant 1$.
De plus, $\sum_{ij} |a_{ij}| = \sum_{i} (\widetilde{C_i}|1) \leqslant \|C_i\|\sqrt{n}$. □

Exercice 11
Soit E euclidien et $G \subset GL(E)$ un sous-groupe fini. Montrer qu'il existe un produit scalaire $<,>$ tel que $G \subset \mathscr{O}(E)$.

Exercice 12
Centre de $O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$.

Exercice 13
Soit f une fonction de l'espace euclidien orienté dans lui-même, non nulle et qui conserve le produit vectoriel. Montrer que f est une rotation.