Programme de colle logique, ensembles et applications

Classe de MPSI

Lycée du Parc

1 Logique

Exercice 1
Nier la formule définissant la continuité d'une fonction en un point.

Exercice 2
Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable $x \in E$. On note $\widetilde{P} = \{x \in E \mid P(x)\}$. Déterminer, en fonction de $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$, les ensembles $\widetilde{\neg P}$, $\widetilde{P \wedge Q}$ et $\widetilde{P \vee Q}$.
Décrire l'affirmation $\forall x \in E, P(x)$ à l'aide de $\widetilde{P}$ et E. Même question pour $\exists x \in EP(x)$.

Exercice 3 (ddl)
Un ensemble est dit décrit en compréhension lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit décrit en extension lorsqu'on cite ses éléments. Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z}/\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$ et $\{2k/k \in \mathbb{Z}\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers pairs.
a) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.
b) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$.
c) Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.
d) Décrire en compréhension l'ensemble $]0, 1]$.
e) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f) Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 4 (ddl)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle différence de sens ont les deux assertions proposées :
a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$ et $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$?

Exercice 5 (ddl)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I.
Exprimer les négations des assertions suivantes :

1) $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
2) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
3) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$
4) $\forall x, y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
5) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
6) $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0$.

Exercice 6 (ddl)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1) la fonction f s'annule
2) la fonction f est la fonction nulle
3) f n'est pas une fonction constante
4) f ne prend jamais deux fois la même valeur
5) la fonction f présente un minimum
6) f prend des valeurs arbitrairement grandes
7) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 7 (ddl)
Etant donné P, Q et R trois assertions, vérifier en dressant la table de vérité :
a) P ou (Q et R) $\sim$ (P ou Q) et (P ou R)
b) non($P \Rightarrow Q$) $\sim$ P et non(Q).

Exercice 8 (ddl)
Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :

1) $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$ **2)** $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$ **3)** $(x \leqslant 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$
4) $x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$.

2 Ensembles et applications

Exercice 9
Soit $A, B, C \subset E$. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$

Indication : *(ne pas indiquer le second membre)*

Exercice 10
Soit $A, B \subset E$. Montrer que

1) $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$.

2) $A \subset B \iff \mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$

Exercice 11 (crible)
Soit $I \neq \emptyset$, $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux famille de parties d'un ensemble E. Montrer que

$$\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in\mathscr{P}(I)}\left(\left(\bigcup_{i\in X} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\notin X} B_i\right)\right)$$

Exercice 12
Soit $A_{i,j}$ des ensembles tels que pour tout $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$. Montrer que $\displaystyle\bigcup_i \left(\bigcap_j A_{i,j}\right) = \bigcap_j \left(\bigcup_i A_{i,j}\right)$

Exercice 13 (ddl)
Étant donné A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :
a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.
c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
d) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

Exercice 14 (ddl)
Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Etablir $A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$

Exercice 15 (ddl)
Soient A et B deux parties de E, on appelle différence symétrique de A et B, l'ensemble

$$A \,\Delta\, B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

Montrer

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

Etant donné A, B et C trois parties d'un ensemble E, montrer que :
a) $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$
b) $A\backslash B = A \Leftrightarrow B\backslash A = B$
c) $A\Delta B = A \cap B \Rightarrow A = B = \emptyset$.

Exercice 16
Soit A, B et C trois parties de E. Avec $\overline{X}$ le complémentaire de X, montrer que

$$(A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}) \Longleftrightarrow (A \cap B = A \cap C)$$

Exercice 17
Soit A et A' des parties de E et B et B' des parties de F, toutes non vides. Montrer que

$$\big[(A' \times B') \subset (A \times B)\big] \Longleftrightarrow \big[(A' \subset A) \quad \text{et} \quad (B' \subset B)\big]$$

Exercice 18
Soient A, B deux parties de E.
Discuter et résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$. Idem $A \cap X = B$.

Exercice 19 (ddl)
Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ où a désigne un élément.

Exercice 20
Soit E un ensemble, montrer que $\mathscr{P}(E) \simeq \mathscr{F}(E, \{0,1\})$

Solution. $\varphi : X \mapsto f_X$, où f_X est la fonction caractéristique de X. □

Exercice 21
Montrer que la seule fonction $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ qui vérifie $f(n+1) > f(f(n))$ pour tout n est l'identité.

Solution. Montrer par récurrence sur n que $f(m) \leqslant n \Longrightarrow m \leqslant n$. □

Exercice 22 (ddl)
Soit $f : E \to F$ une application.
Etablir

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset f^{-1}(f(A)) \qquad \text{et} \qquad \forall B \in \mathcal{P}(F), \quad f(f^{-1}(B)) \subset B$$

Exercice 23 (ddl)
Soit $f : E \to F$ une application.
a) Montrer

$$\forall A, A' \qquad \in \mathcal{P}(E), f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \qquad \text{et} \qquad f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$$

b) Montrer

$$\forall B, B' \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \quad \text{et} \quad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

Exercice 24
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que $g \circ f$ surjective entraîne g surjective, et que $g \circ f$ injective entraîne f injective. Puis
$g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow$ g injective.
$g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow$ f surjective.

Exercice 25 (ddl)
Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Exercice 26
Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$ trois applications.
Montrer que si, parmi les trois applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$, on a deux injections et une surjection, alors f, g et h sont surjectives.

Exercice 27
Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$ et $h : E \to G$ deux applications. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
- Il existe une application $g : F \to G$ telle que $h = g \circ f$.
- $\forall (x, y) \in E^2, \qquad f(x) = f(y) \Longrightarrow h(x) = h(y)$

Exercice 28
Existe-t-il f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ g(x) = x^2$ et $g \circ f(x) = x^3$. Indication : *Regarder l'injectivité / la surjectivité, puis pour* $x = 0$.

Exercice 29
Soit E, F deux ensembles. Montrer que

$$\exists f \in \mathscr{F}(E, F) \text{ injective } \Longleftrightarrow \exists g \in \mathscr{F}(F, E) \text{ surjective}$$

Solution. $\boxed{\Longrightarrow}$ $g = f^{-1}$ prolongée par $\forall y \notin \operatorname{Im} f$, $g(y) = x_0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Pour tout $x \in E$, on choisit un $y \in g^{-1}(x) \neq \emptyset$. □

Exercice 30 (*)
Soit E et F des ensembles, soit f un injection de E dans F et g une injection de F dans E. Montrer qu'il existe une bijection entre E et F.

3 Relations binaires

Exercice 31
On suppose que la relation « être l'ami de » est réflexive et symétrique, et que le nombre de personnes est fini. Montrer qu'il existe deux personnes ayant autant d'amis.

Solution. Supposons que ce soit faux. La fonction qui à une personne associe son nombre d'amis est injective, et donc bijective. Une personne a donc elle-même pour seul ami, et une autre est amie avec tout le monde, en particulier la précédente ! □

Exercice 32
On suppose que la relation « avoir serré la main » est irréflexive et symétrique, et que l'ensemble des personnes est fini. Montrer que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.

Solution.prendre la somme du nombre total de mains serrées modulo 2. □

Exercice 33
Soit E un ensemble, A une partie de E. On définit sur $\mathscr{P}(E)$ la relation binaire $\mathscr{R}_A$ par

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2 \qquad X \mathscr{R}_A Y \Longleftrightarrow X \cap A = Y \cap A$$

1) Montrer que $\mathscr{R}_A$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
2) Montrer que $\varphi : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(E)/\mathscr{R}$ est une bijection.
3) Décrire $\mathscr{P}(E)/\mathscr{R}$ dans le cas où $A = \emptyset$.
4) Décrire $\mathscr{R}_E$.

Exercice 34
Soit E un ensemble, $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ deux relations d'équivalences sur E. On définit $\mathscr{T}$ par

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad (x \mathscr{T} y) \Longleftrightarrow \big((x \mathscr{R} y) \text{ et } (x \mathscr{S} y)\big)$$

1) Montrer que $\mathscr{T}$ est une relation d'équivalence sur E.

2) Décrire les classes d'équivalences de $\mathscr{T}$ (Indication : *intersections non vides de celles de* $\mathscr{R}$ *et de celles de* $\mathscr{S}$).

3) On définit $\mathscr{T}'$ par $\forall (x,y) \in E^2 \quad (x\mathscr{T}y) \Longleftrightarrow \big((x\mathscr{R}y) \text{ ou } (x\mathscr{S}y)\big)$. Donner un exemple où $\mathscr{T}'$ n'est pas une relation d'équivalence.

Exercice 35 (ddl)
Soit E un ensemble et A une partie de E.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\wp(E)$ par :

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
b) Décrire la classe d'équivalence de $X \in \wp(E)$

Exercice 36 (ddl)
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive et transitive sur un ensemble E.
On définit une relation $\mathcal{S}$ par :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence et que $\mathcal{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.

Exercice 37 (ddl)
Soit E l'ensemble des couples (I,f) formé d'un intervalle I et d'une fonction réelle définie sur I.
On définit une relation $\preccurlyeq$ sur E par : $(I,f) \preccurlyeq (J,g) \Leftrightarrow I \subset J$ et $g_{\restriction I} = f$.
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 38 (ddl)
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admet un plus petit élément et un plus grand élément.
Montrer que E est fini.

Exercice 39 (ddl)
Soit E un ensemble ordonné par une relation $\leqslant$.
Un tableau à n lignes et p colonnes est formé d'éléments $a_{i,j} \in E$ avec i indice de ligne $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et j indice de colonne $(1 \leqslant j \leqslant p)$.
On note le plus petit élément de chaque colonne et l'on prend le plus grand de ces plus petits :

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant p} \left(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,j} \right)$$

On note aussi le plus grand élément de chaque ligne et l'on prend le plus petit de ces plus grands :

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant p} a_{i,j} \right)$$

a) Comparer ces deux nombres.
b) Donner un exemple de non égalité.