Programme de colle Déterminants

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1 (ddl)
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Déterminer les morphismes du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ vers $(\mathbb{C}^\star, \times)$. Indication : *Identité ou signature, regarder les permutations.*

Exercice 2 (ddl)
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. On considère la transposition $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ et le n-cycle $\chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.
a) Justifier que l'ensemble $\{\tau, \chi\}$ forme une partie génératrice de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.
b) Existe-t-il une partie génératrice de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ formée d'un seul élément ?

Exercice 3 (ddl)
Soit H l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vérifiant $\sigma(k) + \sigma(n+1-k) = n+1$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$

Exercice 4 (ddl)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer la signature de la permutation suivante :
a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (ddl)
Soit $n \geqslant 2$ et c la permutation circulaire $c = (\begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{matrix})$.
Déterminer toutes les permutations σ de $\mathfrak{S}_n$ qui commutent avec c.

Exercice 6
Montrer que $\mathfrak{S}_n$ s'injecte dans $\mathfrak{S}_{n+1}$ et dans $\mathfrak{A}_{n+2}$.

Exercice 7
Montrer que $\mathfrak{A}_5$ est simple, i.e. n'a aucun sous-groupe distingués propres.
On commencera par :

1) Énumerer les éléments d'ordre k pour $k \in \mathbb{N}$ dans $\mathfrak{A}_5$.

2) Montrer que les éléments d'ordre 3 (resp. 2) sont conjugués.

Solution. H sous-groupe distingué de G : $\forall g \in G, \quad gHg^{-1} \subset H$.

1) Le neutre, 15 produit de deux transpositions disjointes (ordre 2), 20 cycles d'ordre 3, 24 cycles d'ordre 5.

2) Grand principe de la conjugaison :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \qquad \sigma(a\ b\ c)\sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \sigma(b)\ \sigma(c))$$

Donc on prend σ qui envoie h sur h', qui est paire quitte à multiplier deux 3-cycles entre eux.

□

Exercice 8
Soit $\alpha \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que $\varphi : \sigma \mapsto \alpha\sigma\alpha^{-1}$ est un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$. Quels sont les points fixes de $\varphi(\sigma)$?
Soit φ un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$, tel que φ transforme une transposition en une transposition. Montrer que φ est intérieur, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\varphi(\sigma) = \alpha\sigma\alpha^{-1}$.

Solution. Soit $\tau_i = (1i)$. Comme τ_2 et τ_3 ne sont pas disjointes, $\varphi(\tau_2)$ et $\varphi(\tau_3)$ non plus, et $\varphi(\tau_i) = (\alpha_1\alpha_i)$ (pour $i = 2$ et 3).
De plus, il est impossible d'avoir $\varphi(\tau_i) = (\alpha_2\alpha_3)$ (pour $i > 3$) car sinon φ^{-1} appliqué à l'égalité

$$(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_2\alpha_3) = (\alpha_1\alpha_3)$$

donne une absurdité.
Donc $\varphi(\tau_i) = (\alpha_1\alpha_i)$. Comme φ est injective, les α_i sont deux à deux distincts, et donc $\alpha : i \mapsto \alpha_i$ est dans $\mathfrak{S}_n$.
Ainsi, $\varphi(\tau_i) = \alpha\tau_i\alpha^{-1}$ et comme les transpositions τ_i engendrent $\mathfrak{S}_n$, c'est terminé. $\square$

Exercice 9
Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & & \\ 3 & 3 & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & & \cdots & & n \end{vmatrix}$.

Exercice 10 (OT 237 — 2011 PT)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $\det \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ en fonction de $\det A$ et a, b, c, d.

Exercice 11
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

1) Montrer que J est inversible.

2) Calculer AJ, en déduire $\det(AJ)$ puis $\det(A)$.

Exercice 12
On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
En déduire $\det(\alpha I_n + \beta J)$.

Exercice 13

1) Calculer le déterminant de la matrice M ayant des a au-dessus de la diagonale, des b en dessous, et des coefficients diagonaux quelconque $(x_1, \ldots, x_n)$. Dans un premier temps on fera le calcul lorsque $a \neq b$.

2) Calculer le déterminant de $|(\dfrac{1}{a_i + b_j})|$.

Solution.

1) Un classique : il faut poser $P(X) = M - X\,(1)$, où (1) est la matrice n'ayant que des 1 comme coefficients. En soustrayant la première colonne à toutes les colonnes, puis en regardant ce que donnerait un développement par rapport à la première colonne (sans faire les calculs explicites bien sûr !), on constate que $P(X)$ est de degré au plus 1. Il suffit donc de calculer $P(a)$ et $P(b)$ pour déterminer les coefficients de P, et en particulier $P(0)$.

2) Remplacer b_n par X, etc... un peu sur le modèle de ci-dessus.

$\square$

Exercice 14 (inégalité de Hadamard)
Montrer que $\det(M)^2 \leqslant \prod_j \left(\sum_i a_{i,j}^2 \right)$. Déterminer le cas d'égalité.

Exercice 15
Deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ le sont aussi sur $\mathbb{R}$.

Solution. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $MP = PM'$. Décomposons P en partie réelle et partie imaginaire $P = Q + iQ'$. Le polynôme $D(\lambda) = \det(Q + \lambda Q')$ n'est pas le polynôme nul ($D(i) \neq 0$), donc il existe des valeurs λ tel qu'il soit non nul. La matrice $Q + \lambda Q'$ convient. □

Exercice 16

1) Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.
2) À quelle condition existe-t-il une matrice dans $GL_n(\mathbb{Z})$ de première ligne $(a_1, \dots, a_n)$?
3) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}, A + kB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$

Calculer $\det A$ et $\det B$.

Solution.

1) Sens direct évident. Réciproquement, $1/(\det M) \times {}^t\widetilde{M}$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ donc M est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.
2) Théorème de Bezout.

□

Exercice 17 (ddl)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

Exercice 18

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, Montrer que $\det(A + xI_n)$ est polynomial en x, en déduire que les x tels que $A + xI_n$ n'est pas inversible sont isolés.
2) Soit A, B, C et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec D inversible et $CD = DC$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.
3) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que le résultat reste vrai même si D n'est pas inversible.

Solution. Multiplier à droite par $\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$. □

Exercice 19 (ddl)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} \in \{1, -1\}$$

Montrer

$$2^{n-1} \mid \det A$$

Exercice 20 (ddl)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soient f une forme linéaire sur E, p la projection vectorielle sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{Id} - p$ sa projection complémentaire.
Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x, y) = f(p(x))f(q(y)) - f(p(y))f(q(x))$$

est une forme bilinéaire alternée sur E.

Exercice 21 (ddl)
Calculer

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n+1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

On pourra montrer que $D_{n+1} = D_n$ par des opérations sur les lignes.

Exercice 22 (ddl)
Calculer pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ le déterminant suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

Exercice 23 (ddl)
Soit des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux.
Montrer l'existence de $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = I_n$$