Programme de colle Continuité

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1
Études de continuité, avec des ε.

1) $h : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \mathbb{Q} \ni \dfrac{p}{q} & \mapsto & \dfrac{1}{q} \\ \mathbb{Q} \not\ni t & \mapsto & 0 \end{cases}$ où p et q sont premiers entre eux.

2) $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \mathbb{Q} \ni \dfrac{p}{q} & \mapsto & \dfrac{pq}{p^2+q^2+2q} \\ \mathbb{Q} \not\ni t & \mapsto & \dfrac{t}{1+t^2} \end{cases}$ où p et q sont premiers entre eux.

Solution.

1) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, et $f(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{Q}$, donc f n'est pas continue aux points rationnels. Par contre f est continue aux points irrationnels. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$ fixés, et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/q < \varepsilon$. Dans l'intervalle $[x-1, x+1]$ il n'y a qu'un nombre fini de rationnels p'/q' tels que $1/q' > 1/q$. Si p_0/q_0 est le rationnel le plus proche de x qui vérifie $1/q_0 > 1/q$, $\eta = |x - x_0|/2$ convient pour montrer la continuité en x.

2) Même démarche.

□

Exercice 2
Soit f un fonction k-lipschitzienne. Montrer que $\{k \in \mathbb{R}_+ \mid f \text{ } k\text{-lip.}\}$ est de la forme $[A, +\infty[$.

Solution. Le seul point délicat, c'est de montrer que l'intervalle $\{k \in \mathbb{R}_+ \mid f \text{ } k\text{-lip.}\}$ est fermé. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque, on aura alors $\forall k > A,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$, et donc par passage à la limite, $|f(x) - f(y)| \leqslant A|x-y|$. □

Exercice 3

1) Soit $f : A \to \mathbb{R}$, où $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que $f(A)$ est un segment $\Longrightarrow f$ est uniformément continue.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $\exists a, b \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R} |f(x)| \leqslant a|x| + b$.

3) Montrer qu'une fonction continue ayant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ est uniformément continue et bornée.

Solution.

2) Écrire l'uniforme continuité. Prendre une subdivision de pas η de $[x,y]$, on obtient $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + \dfrac{\varepsilon}{\eta}|x-y| + |f(0)|$.

□

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f = 0$. Montrer que f est bornée et que son sup est atteint. Montrer que son inf ne l'est pas forcément. Quelles sont les situations possibles si f à valeur dans $\mathbb{R}$.

Solution. Écrire la limite en $\pm\infty$ avec $\varepsilon = 1/2$ et utiliser la compacité de l'intervalle $[-A, A]$ restant pour conclure, en remarquant que le sup ne peut pas être atteint sur le complémentaire (quitte à remplacer $\varepsilon = \sup|f|/2$). $\square$

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique (avec $T > 0$) telle que $\lim\limits_{+\infty} f$ existe dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f est constante.

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$$

Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 7
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $f^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 8
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f\Big(x + \dfrac{1}{n}\Big) = f(x)$ admet une solution. <u>Indication</u> : *Regarder $n = 2$ pour se faire une idée.*
Est-ce encore le cas si $n \notin \mathbb{N}$.

Solution. $g(x) = f\Big(x + \dfrac{1}{n}\Big) = f(x)$, regarder $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\Big(\frac{k}{n}\Big)$.
Considérer $x \mapsto x - \dfrac{\sin^2(n\pi x)}{\sin^2(n\pi)}$. $\square$

Exercice 9 (ddl)
Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
On pose

$$\varphi(t) = \sup_{x \in [0,1]} (f(x) + tg(x))$$

Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle y est lipschitzienne.

Exercice 10 (ddl)
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et tendant vers 0 à l'infini.
Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 11

1) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante telle que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

2) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que f est continue si et seulement si il existe g, une fonction continue, telle que f/g soit décroissante.

Exercice 12 (ddl)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et prenant la valeur 1 en 0.
On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)\cos x$$

Déterminer f.