Programme de colle Algèbre Linéaire

Classe de MPSI

Lycée du Parc

1 Généralités

Exercice 1
Montrer que le complémentaire d'un sous-espace vectoriel propre n'est pas un sous-espace vectoriel, même si on rajoute 0.

Exercice 2
Soit E et F deux K-espaces vectoriels, et $f \in L(E, F)$. On note

$$A_f = \{g \in L(F, E) \mid f \circ g \circ f = 0\}$$

1) Montrer que A_f est un sous-espace vectoriel de $L(F, E)$.

2) Montrer que, si f est injective, alors

$$A_f = \{g \in L(F, E) \mid \mathrm{Ker}\,(g) \supset \mathrm{Im}\,(f)\}$$

3) Montrer que, si f est surjective, alors

$$A_f = \{g \in L(F, E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,(f)\}$$

Exercice 3
Soit p et q deux projecteurs de E.

1) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq + qp = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Montrer que $p + q$ est un projecteur implique $pq = qp = 0_{\mathscr{L}(E)}$ en caractéristique différente de 2. Montrer que dans ce cas, on a $\mathrm{Im}\ p + q = \mathrm{Im}\ p + \mathrm{Im}\ q$ et $\mathrm{Ker}\ p + q = \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q$.

3) Trouver un contre-exemple en caractéristique 2.

Solution.

2) $pq = p^2q = -pqp$ et $qp = qp^2 = -pqp$ par conséquent $pq = qp$.

□

Exercice 4
Soit E et F deux espaces vectoriels. Si $s : E' \to E$ est une application linéaire, on défini $\bar{s} : \mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{L}(E', F)$ par $u \mapsto u \circ s$.

1) Montrer que s bijective $\iff \forall F\mathbf{k}-$ ev, $\bar{s} : \mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{L}(E', F)$ est bijective.

2) Montrer que $E' \to E \to E'' \to 0$ exacte $\iff \forall F\mathbf{k}-$ ev, $\bar{s} : 0 \to \mathscr{L}(E'', F) \to \mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{L}(E', F)$ exacte.

Exercice 5

1) Vérifier que l'application ad $: \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(\mathscr{L}(E)) : f \mapsto (g \mapsto fg - gf)$ est linéaire.

2) Montrer que si f est nilpotent ad f l'est aussi ; trouver son indice de nilpotence en fonction de celui de f.

Solution. Montrer que $(\text{ad } f)^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} g f^k$.

Montrer que $f^{n-1} \in \text{Im}\,(\text{ad } f)^{2n-2}$ (n est l'indice de nilpotence de f) et pour cela que $\forall a \in \mathscr{L}(E), \exists b \in \mathscr{L}(E), aba = a$. □

Exercice 6 (théorème de Maschke)

Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$ de cardinal r. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on pose $f' = 1/r \sum_{g \in G} gfg^{-1}$.

1) Montrer que f' commute avec G puis que $f' = f$ si et seulement si f commute avec G.

2) Montrer enfin que si h commute avec G alors $(fh)' = f'h$.

3) En déduire que si F est un sous-espace vectoriel stable par G, F admet un supplémentaire stable par G (on pourra prendre une projection p sur F et voir que $\text{Im } p' = F$ puis que p' est une projection).

Solution.

1) Pour tout $g_0 \in G$, $g_0 \circ f' = 1/r \sum_{g \in G} g_0 g f g^{-1} = 1/r \sum_{g' \in G} g' f g'^{-1} g_0$, car $g \mapsto g_0 g$ est une bijection dans G.
Si $f' = f$, on vient de montrer que f commute avec G. Réciproquement, si f commute avec G, alors $gfg^{-1} = f$ pour tout $g \in G$.

2) L'écrire.

3) Soit p un projecteur sur F, sous-espace stable par G. Pour tout $x \in F$, pour tout $g \in G$, $g^{-1}(x) \in F$ donc $g(f(g^{-1}(x))) = g(g^{-1}(x)) = x$. Ce qui entraîne, pour tout $x \in F$, $p'(x) = x$.
Il reste à prouver que p' est un projecteur, c'est-à-dire que $p' \circ p' = p$. Soit $x \in E$, pour tout $g \in G$, $g(f(g^{-1}(x))) \in F$, donc $p'(x) \in F$. Ainsi $p'(p'(x)) = p'(x)$.
En conclusion, p' est un projecteur sur F qui commute à G, donc son noyau (qui est un supplémentaire de F) est stable par G.

□

Exercice 7

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\forall x \in [0,1] \qquad T(f)(x) = \int_0^x f(4(t - t^2))\,\mathrm{d}t$$

Montrer que T est un endomorphisme de E. Injectivité, surjectivité.

Exercice 8

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la dérivation est un endomorphisme de E.

2) Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in E^n$ des *fonctions* fixées. Montrer que l'application suivante est un endomorphisme

$$\forall y \in E \qquad \varphi(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

3) En déduire que les solutions d'une équation différentielle linéaire $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ forment un sous-espace vectoriel.

Exercice 9 (ddl)

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $F \subset G \Rightarrow F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$.

Exercice 10 (ddl)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que : $f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \text{Ker } f \subset B + \text{Ker } f$.

Exercice 11 (ddl)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. On pose $q = \mathrm{Id} - p$ et on considère $L = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ p\}$ et $M = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \exists v \in \mathcal{L}(E), g = v \circ q\}$.
Montrer que L et M sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 12 (ddl)
Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les assertions :
(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$;
(ii) p et q sont des projecteurs de même noyau.

Exercice 13
Soit f et $g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $fg = \mathrm{id}_E$.
Montrer que $\mathrm{Im}\, gf = \mathrm{Im}\, g$ et $\mathrm{Ker}\, gf = \mathrm{Ker}\, f$, puis que $E = \mathrm{Ker}\, gf \oplus \mathrm{Im}\, gf$.
Les application f et g sont-elles nécessairement inversibles ?

Solution. □

Exercice 14
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ tels que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$.
Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre.

Solution. Soit $(\lambda_i)_i \in K^n$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$. Notons i_0 le premier indice tel que $\lambda_i \neq 0$. En composant par f^{n-1-i_0}, on obtient $\lambda_{i_0} f^{n-1}(x) = 0$, et par conséquent $\lambda_{i_0} = 0$, ce qui est absurde. □

Exercice 15
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Le vecteur $x \in E$ est dit vecteur propre de u pour la valeur propre $\lambda \in \mathbf{k}$ si $u(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$.
Montrer qu'une famille de vecteurs propres associé à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.

2 Dimension finie

Exercice 16
1) Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$. Montrer que, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $(PQ)(u) = 0$, $\mathrm{Ker}\, P(u) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u) = E$.
2) On suppose désormais E de dimension finie. En étudiant $\varphi : \mathbf{k}[X] \to \mathscr{L}(E)$, en déduire qu'il existe $P \in \mathbf{k}[X]$ tel que $P(u) = 0$.
3) Pour $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, montrer qu'il existe λ_i et α_i tels que $E = \displaystyle\bigoplus_i \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i \,\mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$.
4) Étudier u sur $F_k = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i \,\mathrm{id}_E)^k$, où $k \in \{1, .., \alpha_i\}$. Trigonaliser

Solution. On écrit Bezout : il existe U et V tels que $PU + QV = 1$. D'où la décomposition $x = x_1 + x_2$ (et $(PQ)(u) = 0$) et $\mathrm{Ker}\, P(u) \cap \mathrm{Ker}\, Q(u) = 0$. □

Exercice 17
Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G)$ où $\dim F = n < \infty$. Montrer que

$$\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) - n \leqslant \mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g)$$

Solution. Première inégalité. $f(E) \subset F$ donc $g(f(E)) \subset g(F)$, par conséquent $\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}\, g$. De plus la formule du rang pour $g_{|f(E)}$ s'écrit $\mathrm{rg}\,(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f - \dim(\mathrm{Ker}\, g_{|f(E)})$, et ainsi $\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}\, f$. En conclusion, nous avons donc $\mathrm{rg}\, g \circ f \leqslant \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g)$.
Seconde inégalité. Celle-ci est équivalente à $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) - n \leqslant \mathrm{rg}\, f - \dim(\mathrm{Ker}\, g_{|f(E)})$, c'est-à-dire $-\mathrm{rg}\,(g) + n \geqslant \dim(\mathrm{Ker}\, g_{|f(E)})$. Or $-\mathrm{rg}\,(g) + n = \dim(\mathrm{Ker}\, g) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}\, g_{|f(E)})$, ce qui permet de conclure. □

Exercice 18
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, où $\dim E = n < \infty$. Montrer que

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Solution.

□

Exercice 19
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où $\dim E < \infty$. Montrer que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f)$$

Solution. □

Exercice 20
Soit $0 \to E_1 \to \cdots \to E_n \to 0$ une suite exacte d'espaces vectoriels. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim E_i = 0$$

Solution. □

Exercice 21
On pose

$$\varphi_n : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos nx \end{pmatrix} \qquad \psi_n : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\cos x)^n \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $\forall n$ $(\varphi_k)_{k \leqslant n}$ et $(\psi_k)_{k \leqslant n}$ sont des familles libres de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2) Montrer que $\forall n$ $\operatorname{Vect}(\varphi_0, \ldots, \varphi_n) = \operatorname{Vect}(\psi_0, \ldots, \psi_n)$.

3) La famille $(\varphi_n)_n$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Solution.

1) Par récurrence en regardant $x = \pi/2n$ pour $(\varphi_k)_{k \leqslant n}$.

2) Formules de trigo (ou Moivre).

3) Non : il existe des fonctions non bornées, ou non continues.

□

Exercice 22
Soit $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}-\mathrm{ev}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

1) Montrer que $\exists!(u, v) \in \mathbb{C}^2 \ / \ \forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = uz + v\bar{z}$.

2) Montrer que f est bijective si et seulement si $|u| \neq |v|$.

3) On suppose $u \neq 0$, et on pose w une racine carrée de $-\dfrac{v}{u}$. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ lorsque $|v| = |u|$, à l'aide de w.

Solution.

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2} f(1) + \dfrac{z - \bar{z}}{2} f(i)$. Par conséquent, en développant et réordonnant les termes, $f(z) = \dfrac{f(1) + f(i)}{2} z + \dfrac{f(1) - f(i)}{2} \bar{z}$, ce qui nous donne l'existence de u et v. Si on suppose que (u, v) et (u', v') conviennent, c'est-à-dire que $(u - u')z + (v - v')\bar{z} = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on obtient $u = u'$ et $v = v'$, d'où l'unicité.

2) Si f est non bijective, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, on a $uz = -v\bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, par conséquent $|u| = |v|$.
Réciproquement, si $|u| = |v|$, on prouve que $w \in \operatorname{Ker} f$ est un complexe de module 1, et donc non nul.

3)

□

Exercice 23

Soit $(x_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ des réels deux à deux distincts, $(r_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ des entiers positifs, et $(y_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{0,\dots,r_i\}}$ des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré $n-1+\sum r_i$ tel que $\forall (i,j)\ P^{(j)}(x_i) = y_{i,j}$.

Solution. □

Exercice 24 (Dedekind)

1) Soit $M - L - K$ des extensions finies : $K \subset L \subset M$ des corps . Montrer que $[M : K] = [M : L][L : K]$.

2) Soit $\mathbf{k}$ un corps, A une $\mathbf{k}$-algèbre (commutative) et $\mathbf{k}'$ une extension de $\mathbf{k}$. Montrer que $\operatorname{Hom}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(A, \mathbf{k}')$ est une partie libre de $\operatorname{Hom}_{\mathbf{k}\text{-mod}}(A, \mathbf{k}')$.

Solution.

1) Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ est une L-base de M, et $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une K-base de L, alors $(e_i f_j)_{i,j}$ est une K-base de M.

2) Soit $(\varphi_i)_{i\in I} \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(A, \mathbf{k}')^I$ une famille liée de taille minimale — elle est donc de cardinal au moins 2. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{k}^I$ tels que $\sum_{i\in I} \lambda_i \varphi_i = 0$. Les φ_i sont des morphismes d'algèbre, donc pour $x \in A$ fixé, on a $\forall y \in A\ \sum_{i\in I} \lambda_i \varphi_i(x)\varphi_i(y) = 0$, et ainsi $\sum_{i\in I} (\lambda_i \varphi_i(x))\varphi_i = 0$. De plus, en multipliant la somme d'origine par $\varphi_{i_0}(x)$, on a $\sum_{i\in I} (\lambda_i \varphi_{i_0}(x))\varphi_i = 0$, et par conséquent

$$\sum_{i\in I} \lambda_i(\varphi_i(x) - \varphi_{i_0}(x))\varphi_i = 0$$

En choisissant bien i_0 et x on a donc trouvé une famille liée de taille strictement plus petite que la taille minimale, ce qui est absurde.

□

Exercice 25