Programme de colle Intégration

Classe de MP*

Lycée du Parc

Exercice 1
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3-5t^2+1}{2t^4+2t^3+t^2+1}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)+e^t}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}\mathrm{d}t$, où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ **5)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{\sqrt{|t^2-1|}(\sqrt{t}+2)}\,\mathrm{d}t$ **8)** $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ **9)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\,\mathrm{d}t$, où $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$.

10) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$ **11)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$ **12)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+t+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$

13) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos 2x}}\,\mathrm{d}x$

14) Étudier la convergence de l'intégrale de la fonction du **4)** au voisinage de 0, sans calculs.

Exercice 2
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur valeur.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)+t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+e^t)(1-e^{-t})}$

5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3
Convergence puis calcul de $I=\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Solution. Prolongeable par continuité en 0, donc intégrable, et $o(1/x^2)$ en $+\infty$ donc intégrable aussi. Pour le calcul, on remarque qu'avec le changement de variable $u=1/x$, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^1 \frac{u\ln u}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u$$

Par conséquent $I=0$. □

Exercice 4
Convergence et calcul de $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ et de $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$

Solution. Pour étudier la convergence en $\pi/2$ de J, le plus simple est de faire un changement de variable $u=x-\pi/2$, ce qui au passage nous montre que $I=J$.
Calculons maintenant $I+J$: □

Exercice 5
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0, et que $f(0)=0$.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2) On suppose de plus que $f'(0)\neq 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 6 (ddl)
Existence de

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}\, t)\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\ln t)^2}\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\,\mathrm{Arctan}\, t}\,\mathrm{d}t$ **7)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$ **8)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\,\mathrm{d}t$

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ **10)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ **11)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ **12)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

13) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$

Exercice 7 (ddl)
Existence et calcul de

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$ **3)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ **7)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ **8)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$ **10)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$ **11)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$ **12)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$

13) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{3\cos^2(x)+1}\,\mathrm{d}x$ **14)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$

Exercice 8 (ddl)
Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x$.

Indication : *Poser* $u = 1-\dfrac{x}{n}$, *i.e. ce qui gène.*

Exercice 9 (ddl)
Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

a) $\displaystyle u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}$ c) $\displaystyle u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}$

Exercice 10 (ddl)
Etablir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 11 (ddl – X MP)
Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}\,\mathrm{d}x$$
Indication : *Série alternée = majoration.*

Exercice 12 (ddl)
Montrer que
$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Exercice 13 (ddl)
a) Etablir pour $a,b>0$ l'égalité
$$\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}$$
b) Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Exercice 14
Soit $f,g:[a,b[\to\mathbb{R}_+$ continues par morceaux. On suppose de plus que $fo_b(g)$.

1) On suppose que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Que peut-on dire de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$? Montrer que
$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}to_b\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

2) On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Que peut-on dire de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$? Montrer que
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}to_b\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

3) Résultats si $f\sim_b g$.

Exercice 15
Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $x\mapsto\displaystyle\int_1^x\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16
Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ on pose $g(x,t)=e^{-t^2}\cos(xt)$

1) Montrer que $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.

2) Montrer que f est continue.

3) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide d'un intégrale impropre.

4) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

5) En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, trouver une expression de f sans intégrale.

Exercice 17
Pour $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times[0,1]$ on pose $g(x,t)=\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ et $f(x)=\displaystyle\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$. De plus, soit $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $h(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.

2) Mêmes questions pour h.

3) Vérifier que $f + h^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, que l'on déterminera.

4) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (à l'aide d'une majoration) et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 18 (Ecricome ECS 2009)

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$

1) Domaine de définition, parité et valeur en $x = 0$ de f.

2) Branche infinie de $\mathscr{C}_f$:

a) Montrer que $\quad \forall (x,t) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+ \quad xe^t \leqslant \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \leqslant xe^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$

b) En déduire que $\forall x > 0$, $x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}$ puis la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) Montrer que f est continue puis $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition. Donner son tableau de variations.

4) **a)** Soit $x > 0$. En effectuant le changement de variable $u = xe^t$, déterminer une nouvelle expression de f. Faire de même pour f'.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ et que la fonction $u \mapsto \dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

d) En déduire un équivalent de f' puis de $f - \dfrac{1}{2}$ au voisinage de 0.

Exercice 19 (Produit de convolution)

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer que la formule

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

définit une fonction $f * g$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $f * g = g * f$ (on justifiera soigneusement).

3) On suppose de plus que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que la fonction g' est bornée. Montrer que $f * g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $(f * g)' = f * g'$.

Exercice 20 (Transformée de Fourier d'une fonction intégrable)

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que la fonction $\widehat{f}$ ainsi définie est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^n$, à support compact (c'est-à-dire nulle hors d'un segment $[a,b]$). Déterminer $\widehat{f^{(n)}}(\xi)$ en fonction de ξ et de $\widehat{f}(\xi)$ (remarque : on dérive f *puis* on prend la transformée de Fourier).

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et supposons que la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$ soit aussi intégrable. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et montrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{f}(\xi) = -i\widehat{g}(\xi)$.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et déterminer $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}\widehat{f}$ en fonction de $\widehat{g}_n$.

Exercice 21
Pour $x > 0$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

3) Donner un équivalent de F en $+\infty$.

4) Donner un équivalent de F en 0. On pourra poser $u = x + t$ et découper l'intégrale obtenue en $u = 1$.

Exercice 22
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) Montrer que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.

3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$. Indication : *On pourra comparer* $\sqrt{1-x^2t}$ *et* $\sqrt{1-t}$.

Exercice 23
Transformée de Laplace ?

Exercice 24
Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $D(O, R) \subset \mathbb{C}$ ($R > 0$). Montrer que f est développable en série entière. Indication : *Fourier et dérivation sous le signe somme.*

Solution. Pour tout $r \in]0, R[$, on pose $f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$.
$f_r = \displaystyle\sum_n c_n(f_r)e_n$ ($\mathscr{C}^1$, Dirichlet), avec $a_n(r) = c_n(f_r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$.
Théorème de dérivation sous le signe somme + IPP : $a_n'(r) = \dfrac{n}{r}a_n(r)$ donc $a_n(r) = a_n r^n$. De plus $a_n(.)$ bornée en 0 donc $c_n(f_r) = 0$ pour tout $n < 0$. □

Exercice 25
Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec les f et D suivants :

1) $f(x, y) = x$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0\ ,\ x + y \leqslant 1\}$

2) $f(x, y) = xy$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leqslant y \leqslant x\}$

3) $f(x, y) = x^3 - \sin(x)$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0\ ,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

4) $f(x, y) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+y^2}}$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0\ ,\ x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$ où $a \in]0, 1[$.
En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a\cos\theta)}{\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

5) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\ ,\ x^2 + y^2 - y \geqslant 0\ ,\ x^2 + y^2 - x \geqslant 0\}$.
On pourra représenter $x^2 + y^2 - y = 0$, $x^2 + y^2 - x = 0$ et D.

Exercice 26 (PT 2008 C)
Pour tout $R > 0$ on pose

$$I_R = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où} \quad D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$$
$$J_R = \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où} \quad C_R = [-R, R] \times [-R, R]$$

1) Calculer I_R en fonction de R.

2) Comparer I_R, J_R et $I_{R\sqrt{2}}$. Indication : *On pourra faire un dessin de D_R, C_R et $D_{R\sqrt{2}}$.*

3) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

(Indication : *Calculer J_R en fonction de $\displaystyle\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.*)

Exercice 27
Calculer l'intégrale $\displaystyle\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ avec les f et V suivants :

1) $f(x,y,z) = \sin(x+y+z)$ avec $V = [0,\pi/3]^3$.

2) $f(x,y,z) = xyz$ avec $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0\ ,\ z \geqslant 0 \text{ et } x+y+z \leqslant 1\}$

3) $f(x,y,z) = z$ avec $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geqslant 0\ ,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \text{ et } x^2+y^2 \leqslant z^2\}$

4) Volume de $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 2z \text{ et } x+y \geqslant z\}$

5) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ avec $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 1 \text{ et } x^2+y^2 \leqslant z^2\}$ (OT 2010)

Exercice 28 (ddl – MP MP)
Soit

$$I_n = \iint_{[0,1]^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^n+y^n}$$

Déterminer la limite de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 29 (D'après E3A PC 2013 A et Centrale PC 2013 1 — à oralifier)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,\mathrm{d}t$.

1) Soit λ un réel strictement positif. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2}\right)\mathrm{d}u$$

après en avoir justifié l'existence.

2) **a)** Pour tous réels x et t, calculer le module $|1-xe^{it}|$ du nombre complexe $1-xe^{it}$.

b) Montrer que si x est un réel différent de 1 et -1, alors $1-2x\cos(t)+x^2 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

c) Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\pi} \ln(1-\cos t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\pi} \ln(1+\cos t)\,\mathrm{d}t$$

d) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,\mathrm{d}t$ converge.

3) À l'aide d'un changement de variable, montrer que la fonction h est paire. Déterminer $h(0)$.

4) Montrer que la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et donner une expression de h' à l'aide d'une intégrale.

5) Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[$ et $x \neq 0$, on a les deux égalités

$$\int_0^{\pi} \frac{x-\cos t}{1-2x\cos(t)+x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x+1}\int_0^{+\infty} \frac{u^2-\lambda}{(u^2+\lambda^2)(u^2+1)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2}\,\mathrm{d}u$$

où l'on a posé $\lambda = \dfrac{1-x}{1+x}$. On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$.

6) Démontrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et donner, pour tout $x \in]-1,1[$, une expression de $h'(x)$ sans intégrale puis de $h(x)$.

7) Pour tout $x \neq 0$, déterminer une relation entre $h(x)$ et $h(1/x)$.

8) En déduire la valeur de $h(x)$ pour $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

9) **a)** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\, \mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, \mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, \mathrm{d}t$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\, \mathrm{d}t = -\pi \ln 2$.

c) En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(2-2\cos t)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(2+2\cos t)\, \mathrm{d}t$.

10) Expliciter $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, selon les valeurs de x.

Exercice 30 (Fresnel – ddl)
a) Justifier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$$

b) Soit $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^{+\star}$ une application continue. Pour $t>0$ on pose

$$D_t = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)/\theta \in [0,\pi/2]\,, r \in [0, tf(\theta)]\}$$

et on introduit

$$\varphi(t) = \iint_{D_t} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ et } \psi(t) = \iint_{D_t} \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Déterminer les limites, quand T tend vers $+\infty$ de

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi \text{ et } \frac{1}{T}\int_0^T \psi$$

c) On choisit f pour que $D_1 = [0,1]^2$. On pose

$$C(t) = \int_0^t \cos(u^2)\,\mathrm{d}u \text{ et } S(t) = \int_0^t \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$$

Montrer que $\varphi(t) = 2C(t)S(t)$ et $\psi(t) = C(t)^2 - S(t)^2$.
d) En déduire les valeurs des intégrales de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$$

Exercice 31 (ddl)
Soit

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.
c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
d) Exploiter l'équation différentielle précédente pour former ce développement.