Programme de colle Équations différentielles

Classe de MP*

Lycée du Parc

Exercice 1
Soit $A : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ $\mathscr{C}^0$, T-périodique, et $(E) : V' = AV$.

1) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et V solution $\neq 0$, tels que $\forall t$, $V(T+t) = \lambda V(t)$.

2) Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base de l'espace des solutions de (E). On note $M = (V_1|\dots|V_n)$ la matrice de passage associée.
Montrer qu'il existe $C \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $M(t+T) = M(t)C$.

Solution.

1) $\Phi : V \mapsto (t \mapsto V(T+t))$ est un endomorphisme de $\mathscr{S}$ l'espace des solution de (E). Sur $\mathbb{C}$, il existe au moins un vecteur propre pour une valeur propre λ.

2) $\det M = W \neq 0$ par Cauchy-Lip (jamais ou toujours nul). On pose $C = M(T)M(0)^{-1}$ puis unicité de la solution (CL), or $M(t+T)$ et $M(t)C$ sont solution de la même équa diff plus CI.

□

Exercice 2 (M.P. - MP, ddl)
a) Montrer que l'équation différentielle

$$y' - y = f$$

avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique admet une unique solution bornée.
b) Est-elle périodique ?
c) Donner ses coefficients de Fourier c_n en fonction de ceux de f et étudier la convergence de $\sum c_n$.

Solution. $y(x) = \Big(\lambda + \int_0^x f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t\Big)e^x$, donc $\lim\limits_{+\infty} y < \infty$ implique $\lambda = -\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ (qui existe car f bornée). D'où l'expression de y.
On écrit (E) pour c_n, ce qui donne $(in-1)c_n = c_n(f)$. $y(0) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. □

Exercice 3 (M.P. - MP, ddl)
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) A est antisymétrique ;
(ii) chaque solution du système différentiel $Y' = AY$ est de norme constante.

Solution. $\boxed{\Longrightarrow}$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|Y\|^2 = {}^tYY' + {}^t(Y')Y = ... = 0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ idem. □

Exercice 4
Soit f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^0$, telles que $|f| < g$. Soit y, $z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^1$ telles que $y' = f(y)$ et $z = g(z)$. On suppose $|y(0)| \leqslant z(0)$. Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $|y(x)| \leqslant z(x)$.

Solution. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $|y(\alpha)| > z(\alpha)$. Ops $y(\alpha) > z(\alpha)$.
Soit $\gamma = \inf\{\alpha > 0 \mid y(\alpha) > z(\alpha)\}$. Par continuité, $y(\gamma) \geqslant z(\gamma)$.
Si $y(\gamma) > z(gamma)$, alors $\gamma > 0$ (hypothèse en 0) et par continuité $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\gamma - \varepsilon$ vérifie $y > z$: contradiction.
Donc $y(\gamma) = z(\gamma)$.
Donc $y'(\gamma) = f(y(\gamma)) < g(y(\gamma)) = g(z(\gamma)) = z'(\gamma)$, contradiction. □

Exercice 5 (Gronwall)

1) Soit $x' = ax$ une équa diff où $a : I \to \mathscr{L}(E)$. $W = \det(v_1, \ldots, v_n)$ où $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base des solutions.
Montrer que W est solution de $W' = \mathrm{Tr}\,(a)W$.

2) Soit $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^0$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $y'' + py = 0$ a une solution non bornée.

Solution.

1) Cours.

2) Ici $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$, donc $W' = 0$ et $W =$cste, non nulle car $\dim \mathscr{S} = 2$. Soit (f, g) base de $\mathscr{S}$.
f bornée $\Longrightarrow |f''| \leqslant A|p| \Longrightarrow f''$ intégrable sur $[0, +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} f'$ existe.
Si f et g sont bornées, alors .

□

Exercice 6 (ddl)
Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $a \circ b = b \circ a$.
En considérant pour $x_0 \in E$, l'application $t \mapsto (\exp(ta) \circ \exp(tb))x_0$, établir $\exp(a + b) = \exp(a) \circ \exp(b)$.

Exercice 7 (ddl)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont aucune valeur propre n'est élément de $2i\pi\mathbb{Z}$.
a) Montrer que $\mathrm{e}^A - I_n$ est inversible.
Soit $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une fonction continue et 1-périodique.
b) Montrer que l'équation

$$(E) : X' = AX + B(t)$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ possède une unique solution 1-périodique.

Exercice 8 (ddl)
a) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(nt)$$

b) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

Exercice 9 (ddl)
Soient $p, q : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et l'équation différentielle définie sur $[0, 1]$ suivante

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Montrer que si une solution possède une infinité de racines alors celle-ci est la fonction nulle.

Solution. On est dans $[0, 1]$ compact, donc il existe une suite de racines (x_n) convergente vers a, racine aussi par continuité. Rolle nous donne une suite (c_n) de racines de y' convergente vers a.
Donc y est solution du problème de Cauchy [équa diff linéaire] avec pour conditions initiales $y(a) = y'(a) = 0$.
Donc par CL, $y = 0$. □

Exercice 10 (ddl)
Soient $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ continues vérifiant $q_1 \leqslant q_2$.
On note φ_1 et φ_2 deux solutions sur I respectivement des équations

$$y'' + q_1(x)y = 0 \text{ et } y'' + q_2(x)y = 0$$

On suppose la solution φ_1 non identiquement nulle.
a) Montrer que les zéros de φ_1 sont isolés i.e. que si $x_0 \in I$ annule φ_1 alors

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \varphi(x) = 0 \Rightarrow x = x_0$$

b) Soient $a < b$ deux zéros consécutifs de φ_1. Montrer que φ_2 s'annule sur $[a, b]$.
(indice : étudier $\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'$)
c) Application : montrer que si φ est une solution non nulle de l'équation $y'' + \mathrm{e}^x y = 0$ alors

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \exists x \in [a, a + \pi], \varphi(x) = 0$$

Solution.

1) Voir Ex 9.

2) Wronskien de φ_1 et φ_2.

□

Exercice 11
Soit $p \in \mathscr{C}^0(]A, +\infty[, \mathbb{R})$. On suppose que $0 < m \leqslant p \leqslant M$. Soit $(E) : y'' + p(x)y = 0$.

1) Soit $x_0 > A$. Montrer que toute solution s'annule sur $[x_0, x_0 + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}]$.

2) Montrer que l'ensemble des zéros d'une solution non nulle est infini dénombrable et que deux zéros sont distant d'au moins $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}}$.

Exercice 12
Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -y + \sin(\alpha t) \\ y' & = & x - \cos(\alpha t) \end{array} \right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

2) $\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & (\alpha + \beta)x + \beta y \\ y'' & = & -\beta x + (\alpha - \beta)y \end{array} \right.$

3) $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + y - z \\ y' & = & -x + 2y + z \\ z' & = & x + z \end{array} \right.$

4) $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2y - z + t \\ y' & = & 2x + 4y - 2z \\ z' & = & -x - 2y + z \end{array} \right.$

Solution. 2) regarder $z = x + y$. □

Exercice 13
Même démarche pour résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $ty' - \dfrac{y}{2} = t^2 \ln |t|$

2) $t(t-1)y' + 2y = 3t$

Exercice 14 (Linéaires d'ordre 2, changement de variable)
Résoudre, à l'aide des changements de variable proposés, les équations différentielles suivantes :

1) $4ty'' + 2y' - y = 0$ et $t = x^2$

2) $(1 - t^2)y'' - ty' + y = 0$ et $t = \cos x$

3) $(1 + t^2)^2 y'' + 2t(1 + t^2)y' + my = 0$ où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 (Linéaires d'ordre 2, cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène)
Résoudre, en cherchant une solution particulière de l'équation homogène (changement de fonction y), les équations différentielles suivantes :

1) $t^2y'' + 4ty' + 2y = \ln(1+t)$, solution particulière de la forme $t \mapsto t^\alpha$.

2) $ty'' + 2y' - ty = 0$, solution particulière développable en série entière.

3) $t^2y'' + t(t+1)y' - y = 0$, solution particulière développable en série entière.

Exercice 16
Résoudre l'équation différentielle $2t(1-t)y''+(3-5t)y'-y = 0$ en la mettant sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)y' + h(t)y) = 0$.

Exercice 17
À l'aide d'une équation différentielle, déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes

1) $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$ **2)** $f(x) = (\operatorname{Arcsin} x)^2$ **3)** $f(x) = (\ln(1+x))^2$

Exercice 18
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = -2(2n-1)a_n$.

2) Donner le rayon de convergence R de la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, puis montrer que f est solution sur $]-R, R[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.

3) En déduire f.

Exercice 19
Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes. On exprimera explicitement les solutions obtenues à l'aide des fonctions usuelles.

1) $x(x+1)y'' + y' + y = 0$; **2)** $x^2y''+x(x+1)y'-y = 0$; **3)** $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Solution.

1) **2)** **3)**

□

Exercice 20
$(1+x^2)y''+xy'-\dfrac{1}{4}y = 0$. Que devient l'équation différentielle en posant $x = \operatorname{sh} t$? Intégrer la nouvelle équation et mettre les solutions de l'équation initiale sous la forme $Ay_1(x)+By_2(x)$ où y_1 et y_2 sont respectivement paire et impaire. En déduire les développements de $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ et $\dfrac{x}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$.

Solution. □

Exercice 21
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

3) Montrer que F est solution de l'équation différentielle $xy' - 2y = -\sin^2(x)$.

4) En déduire un développement de F en série entière et une expression de F à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 22
On note $\mathscr{F}$ la famille de courbes dépendant du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ d'équations $(E_\lambda) : \lambda(x+y)^2 - 2(x-y) = 0$. Montrer que cette famille de courbe est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = f(y/x)$. Résoudre cette équation différentielle en posant $y(t) = tx(t)$.

Exercice 23
On considère le système différentiel :

$$(S) : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + x^3$$

1) Déterminer les solutions constantes de (S).

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - \dfrac{x^4}{2}$. Montrer que si $(\mathbb{R}, (x, y))$ est solution de (S), la fonction $\varphi : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est constante.

3) Construire la trajectoire de la solution maximale de (S) vérifiant $x(0) = 0$ et $y(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.