# Programme de colle Calcul différentiel

Classe de MP$^\star$

Lycée du Parc

**Exercice 1**
Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est homogène de degré $\alpha$ si, et seulement si, $\mathrm{d}f(x)(x) = \alpha f(x)$.

**Exercice 2 (ddl – M.P. MP)**
On note $U$ l'ensemble des $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $E = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ ; on dit que $f$ est homogène de degré $\alpha$ si $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ pour tous $t \in \mathbb{R}^{+\star}$, $(x, y) \in U$. On pose :

$$\forall f \in E, \forall (x, y) \in U, \Phi(f)(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

**1)** Déterminer Ker $\Phi$.

**2)** Soit $f \in E$. Montrer que $f$ est homogène de degré $\alpha$ si, et seulement si, $\Phi(f) = \alpha f$.

**3)** Résoudre l'équation d'inconnue $f \in E$, $\Phi(f) = h$, $h$ étant la fonction qui à $(x, y)$ associe $(x^2+y^2)^{3/2}xy$.

**Solution.**

**1)** Poser $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin(\theta))$. L'EDP devient $r\partial_r g = 0$.

**2)** Cf. exercice 1.

**3)** $\Phi$ linéaire : la solution sera de la forme $f_0 + \text{Ker } \Phi$, et d'après ci-dessus $f_0 = h/5$ convient.

$\square$

**Exercice 3**
La fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = z^2$, vu comme fonction de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, est-elle un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme ?

**Exercice 4 (D'après E3A MP 2007)**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.
Soit $D$ le disque unité et $C$ le cercle unité son bord.

**1)** Justifier l'existence, pour la fonction $f$, d'un maximum global $A$ et d'un minimum global $a$ sur $D$.

**2)** Étudier les éventuels extrema locaux de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

**3)** Désormais, soit $g = f_{|D}$ la restriction de $f$ à $D$.

- **a)** On rappelle que $A$ est le maximum de $g$ sur $D$. Montrer que $A$ ne peut être atteint que sur le cercle $C$.
- **b)** En déduire la valeur de $A$ et les point de $C$ sur lesquels $g$ atteint cette valeur.
- **c)** Déterminer la valeur du minimum $a$ et les point de $C$ sur lesquels $g$ atteint cette valeur.

**Exercice 5 (ddl)**
a) Justifier que l'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
b) Calculer la différentielle de det en $I_n$ puis en toute matrice $M$ inversible.
c) En introduisant la comatrice de $M$, exprimer la différentielle de det en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 6 (ddl)**
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$f(x,y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ pour } x \neq y \text{ et } f(x,x) = g'(x)$$

a) Exprimer $f(x,y)$ à l'aide d'une intégrale sur l'intervalle $[0,1]$. b) En déduire que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 7**
Montrer que $(x,y) \mapsto (x+y, xy)$ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\right\}$$

vers un ouvert $V$ que l'on précisera.
Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in \Omega \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2$$

On utilisera le changement de variable $u = x + y$ et $v = xy$.

**Exercice 8 (ddl)**
On considère $f : (x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}$.
a) Déterminer le domaine de définition $D$ de $f$. ($\Omega = \{(x,y) \mid |x| < \max(1, |y|^2\})$.
b) Etudier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $D$.

**Exercice 9 (ddl)**
Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

**Exercice 10**
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On note $\mathrm{d}f$ sa différentielle en tant que fonction de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable si et seulement si $\mathrm{d}f(z)$ est une similitude.

**Exercice 11**
Soit $\mu : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$ définie par $\mu(M) = (\mathrm{Tr}\,(M), \ldots, \mathrm{Tr}\,(M^n))$.

**1)** Montrer que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{d}\mu(M)) = \deg P_{\min(M)}$.

**2)** Montrer que $\{M \mid P_{\min(M)} = \chi_M\}$ est un ouvert.

**3)** Montrer qu'il est connexe par arc

**Exercice 12 (OT 11 – Ulm 2012)**
Montrer que $A \mapsto \exp(A)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer sa différentielle et montrer qu'elle est égale à $\displaystyle\int_0^1 \exp(tA)B\exp{(1-t)A}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 13**
Soit $(P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]^n$ tel que $\det\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial x_j}(0)\right) \neq 0$.
Soit $V = V(P_1, \ldots, P_n)$ l'ensemble des zéros communs. On suppose que $0 \in V$.

**1)** Que peut-on dire de 0 dans $V$ ?

**2)** Montrer qu'il existe $Q_1, \ldots, Q_p \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $V(Q_1, \ldots, Q_p) = V - \{0\}$.

**Solution.** Par inversion locale, 0 est isolé dans $V$.
Soit $Q_i = P_i$ et $Q_{n+1} = \det\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(0)\right)$. $V(Q_1, \ldots, Q_{n+1}) = V \cap Q_{n+1}^{-1}(0) \subset V$.
Par l'inversion locale, $V(Q_1, \ldots, Q_{n+1}) - V$ est constitué de points isolés.
Il reste à montrer que ces points isolés sont forcément en nombre fini.
Puis on rajoute ces points : $V_1 \cup V_2 = V(I_1 I_2)$ et les idéaux sont de type fini.
Idée du sujet (OT 2012) : $P_i = \sum_{k=1}^{n} X_k G_{ik}$. La condition sur le jacobien en 0 s'écrit $\det(G_{ij}(0)) \neq 0$. Et ? □

**Exercice 14 (ddl)**
On considère la forme différentielle

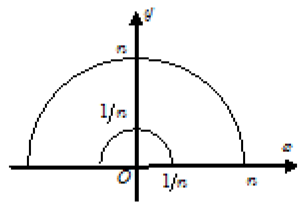
$$\omega(x, y) = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
a) La forme différentielle $\omega$ est-elle fermée ?
b) Calculer l'intégrale de $\omega$ le long du cercle de centre $O$, de rayon 1 parcouru dans le sens direct.
c) La forme différentielle $\omega$ est-elle exacte ?

**Exercice 15 (ddl)**
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
a) Montrer que la forme différentielle suivante est fermée :

$$\omega(x, y) = \frac{\mathrm{e}^{-y}}{x^2 + y^2}\left((x \sin x - y \cos x)\,\mathrm{d}x + (x \cos x + y \sin x)\,\mathrm{d}y\right)$$

b) Calculer la circulation de $\omega$ le long de l'arc figuré direct ci-dessous




c) En passant à la limite quand $n \to +\infty$ déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

**Exercice 16 (ddl)**
Soient $O, A, B$ les points d'affixes respectives $0, r, r\exp(i\pi/4)$ avec $r > 0$. Soit $\Gamma_r$ l'arc paramétré de $\mathbb{C}$ constitué du segment $[O, A]$, orienté de $O$ vers $A$, de l'arc $\mathcal{C}_r$ du cercle de centre $O$ et de rayon $r$ d'origine $A$ et d'extrémité $B$ et du segment $[B, O]$ orienté de $B$ vers $O$.
a) Calculer

$$I_r = \oint_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)$$

b) Que dire de la limite, quand $r \to +\infty$, de

$$J_r = \int_{\mathcal{C}_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)?$$

c) Qu'en déduire ?

**Exercice 17 (ddl – Inégalité isopérimétrique)**
Soit $\gamma$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $2\pi$-périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \left|\gamma'(s)\right| = 1$$

On note $S$ l'aire orientée délimitée par $\gamma_{\restriction[0,2\pi]}$.
a) Exprimer $S$ à l'aide des coefficients de Fourier exponentiels de $\gamma$.
b) Montrer $S \leqslant \pi$ et préciser le cas d'égalité.