Programme de colle Bilinéaire

Classe de MP*

Lycée du Parc

Exercice 1
Soit E un espace euclidien (de dimension n) et F un sous-espace vectoriel non nul.
On note $\pi(F,E) = \inf_{F'} \|p_{F,F'}\|$ (où F' parcourt tous les sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E).
Montrer que $\pi(F,E) = 1$.

Solution. On pourra montrer que $\|p\| = 1$ si et seulement si F et F' sont orthogonaux. □

Exercice 2 (Méthode des moindres carrés)
Dans cet exercice, on identifie $\mathbb{R}^p$ et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire le vecteur $(x_1,\dots,x_p)$ et la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$ fixés, on s'intéresse au système suivant, où $X \in \mathbb{R}^p$.

$$AX = B \tag{1}$$

Le système (1) n'a une solution X_0 que si $B \in \text{Im } A$ (*cf.* le cours sur les systèmes). Pour $B \in \mathbb{R}^n$ quelconque, on généralise la notion de solution du système (1) :

Définition : X_0 est une *pseudo-solution* du système (1) $\iff \|AX_0 - B\| = \inf_{X\in\mathbb{R}^p} \|AX - B\|$.

1) Montrer qu'il existe au moins une pseudo-solution X_0 au système (1).
<u>Indication</u> : *Commencer par construire* $Y_0 \in \text{Im } A$ *tel que* $\|Y_0 - B\| = \inf_{Y\in\text{Im } A} \|Y - B\| = \mathrm{d}(B, \text{Im } A)$.

2) Décrire l'ensemble $\mathscr{S}$ des pseudo-solutions de (1). On note désormais X une pseudo-solution de (1).

3) Montrer que X est une pseudo-solution si et seulement si ${}^tAAX = {}^tAB$.
<u>Indication</u> : *Que peut-on dire de* $< AX', B - AX >$*, où* $X' \in \mathbb{R}^p$ *est quelconque ?*

4) On suppose que rg $A = p$. Montrer que A est injective (on identifie A et l'application linéaire associée), puis que ${}^tAA$ est inversible. (<u>Indication</u> : *Montrer que* ${}^tAA$ *est injective*)
Montrer que (1) a une unique pseudo-solution, que l'on déterminera.

5) Dans $\mathbb{R}^2$, on fixe n points $(M_k(x_k, y_k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ n'ayant pas tous la même abscisse.

- **a)** Si $\mathscr{D}$ est une droite affine d'équation $y = \alpha x + \beta$, on note H_k le projeté de M_k sur $\mathscr{D}$ parallèlement au vecteur $(0,1)$. Exprimer les coordonnées de H_k en fonction de α, β et x_k.
- **b)** Montrer qu'il existe une unique droite $\mathscr{D}$ qui minimise $\sum_k M_kH_k^2$, et calculer α et β.

  (c'est la « droite des moindres carrés »).

6) La conique passant au plus près de n points fixés.

Exercice 3 (Polynômes de Hermite)
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E. Orthogonaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) En déduire la projection de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

3) Montrer que $u(P) = P'' - XP'$ est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 4 (ddl)
On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0,1]\,,\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour $f \in E$, on note F la primitive de f qui s'annule en 0

$$\forall x \in [0,1]\,, F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et on considère l'endomorphisme v de E déterminé par $v(f) = F$.
a) Déterminer un endomorphisme $v^\star$ vérifiant

$$\forall f, g \in E, \langle v(f), g\rangle = \langle f, v^\star(g)\rangle$$

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^\star \circ v$.

Solution.

□

Exercice 5 (ddl – X et M-P)
On définit sur $E = \mathbb{R}[X]$ le produit scalaire

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer l'existence et l'unicité de $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\,, P(0) = \langle A \mid P\rangle$
Montrer que A est de degré n.

2) En déduire qu'il n'existe pas de $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]\,, P(0) = \langle A \mid P\rangle$?

Solution.

□

Exercice 6 (ddl)
Soit E un espace préhilbertien réel.
a) Etablir que pour tout sous-espace vectoriel F de E, $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$.
Désormais, on suppose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que

$$H = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \int_{-1}^1 |t|\,P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$$

est un hyperplan fermé de E.
c) Soit $Q \in H^\perp$. Etablir que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{-1}^1 |t|\,P(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-1}^1 Q(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

d) Etablir que $H^\perp = \{0\}$ et conclure qu'ici l'inclusion $\bar{H} \subset H^{\perp\perp}$ est stricte.

Solution.

□

Exercice 7 (ddl – Centrale)
Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{tr}(u) = 0$.
a) Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x) \mid x \rangle = 0$.
b) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Solution.

□

Exercice 8 (ddl)
On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale d'un espace préhilbertien E telle que $V = \operatorname{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dense dans E. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2$$

Solution.

□

Exercice 9 (ddl – M-P)
Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$. Montrer

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow u + u^\star \in \mathrm{GL}(E)$$

Solution.

□

Exercice 10
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes autoadjoints tels que $\sum_i \operatorname{rg} u_i = n$ et $\forall x \in E$, $\sum < u_i(x), x > = < x, x >$. Montrer que les u_i sont des projecteurs orthogonaux dont les images sont en somme directe.

Solution.

□

Exercice 11
Soit H un espace de Hilbert (préhilbertien complet).

1) Soit $(x_n) \in B(0,1)$, montrer qu'il existe une suite extraite (y_n) de (x_n) telle que $\forall k$, $(< y_n, x_k >)_n$ converge.

2) Si $E = \overline{\operatorname{Vect}(x_n)}$, en déduire l'existence de $u \in E$ tel que $\forall v \in E$, $< y_n, v > \to < u, v >$.

3) En déduire que, $\forall v \in H$, $< y_n, v > \to < u, v >$.

Solution.

□

Exercice 12
Soit S une matrice réelle symétrique définie positive. Montrer qu'elle admet une unique racine carrée symétrique définie positive, et que $S \mapsto \sqrt{S}$ est un homéomorphisme.

Solution.

□

Exercice 13
Nature de la surface : $-5x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - 2yz + 6xz - 1 = 0$

Solution. $\chi_2(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^3 - 7\lambda^2 + 4$
... qui ne semble pas avoir de racines évidentes. La matrice A_2 étant symétrique réelle, elle est diagonalisable, donc ses valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 (les racines de χ_2) sont réelles.
Le produit des racines vaut 4 (le terme constant, $= \det(A_2)$), donc il n'y a pas de racines nulles, et il y a 0 ou 2 valeurs propres négatives. De plus $\operatorname{Tr}(A_2) = -7 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, donc il y a exactement une valeur propre α positive et deux valeurs propres négatives $-\beta$ et $-\gamma$.
Ainsi $\mathscr{Q}_2$ a pour équation $\alpha x_1^2 - \beta y_1^2 - \gamma z_1^2 = 1$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$. En multipliant par -1 :

$$-\alpha x_1^2 + \beta y_1^2 + \gamma z_1^2 = -1$$

$\boxed{\text{La quadrique } \mathscr{Q}_2 \text{ est un hyperboloïde à deux nappes}}$ $\square$

Exercice 14 (ddl)
Montrer que si q est une forme quadratique réelle est définie, celle-ci est positive ou négative.

Solution. TAF entre $t = 0$ et $t = 1$ pour $q(ta + (1-t)b)$. $\square$

Exercice 15 (ddl)
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer

$$\operatorname{tr}(AB) \geqslant 0$$

Solution. Réduire A, se placer dans la nouvelle base, regarder le signe des coefficients diagonaux de B'. $\square$

Exercice 16 (ddl — Mines MP)
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
a) Montrer que si A est définie positive alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.
b) Montrer que $(\det A)^t (\det B)^{1-t} \leqslant \det(tA + (1-t)B)$ pour tout $t \in]0, 1[$.

Solution. a) A définit le produit scalaire et B un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire A.
b) Si A définie, on se place dans une bonne base. On compare valeur propre par valeur propre, avec la concavité du logarithme.
Sinon, on pose $A_p = A + \dfrac{1}{p} I_n$. $\square$