Lycée Lavoisier
Mathématiques Spéciales PC

Année scolaire 2007/2008

Semaine 19
25 mars 2008

1 Programme de Colles

1.1 Intégrale sur un intervalle quelconque

1.1.1 Intégrales impropres

- Fonctions à valeurs positives.
- Comparaison à une série numérique.
- Cas des fonctions à valeurs réelles et complexes.

1.1.2 Fonctions intégrables

1.1.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

1.2 Suites et séries de fonctions

- Convergence simple.
- Convergence normale des séries.
- Approximation de fonctions.
- Intégration des suites et séries de fonctions.
- Dérivation des séries de fonctions.

2 Exercices

Exercice 1
Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Peut-on *a priori* intervertir limite et intégrale ? Que constate-t-on après calcul ?

Exercice 2
Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x^\alpha}{1+nx}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Exercice 3
Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 4
Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Montrer que, malgré la convergence uniforme de la suite des f_n, on ne peut pas intervertir limite et dérivation.

Exercice 5
Étudier la convergence simple puis normale de la série de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6
Étudier la convergence simple puis normale de la série de fonctions $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7
Étudier la convergence simple puis normale de la série de fonctions $f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{x^2+n^2}$ sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence uniforme de la série.

Exercice 8
Étudier la convergence simple puis normale de la série de fonctions $f_n(x) = e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\sum f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 9
Étudier la convergence simple puis normale de la série de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Étudier la suite des f_n'.

Exercice 10
Soit $f_n, g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ qui convergent uniformément resp. vers f et g bornées. Montrer que $f_n g_n$ converge uniformément vers fg.

Exercice 11
Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-x/n}$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que, pourtant, $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ pour tout n.

Exercice 12
Étudier la convergence simple puis normale de la série de fonctions $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13
Étudier la convergence simple puis normale de la série de fonctions $f_n(x) = \frac{x^n}{n}\sin(nx)$ sur $]-1;1[$. Calculer f' explicitement, puis en déduire f. Montrer que cette série converge aussi uniformément sur $[-1;1]$.