Lycée Lavoisier
Mathématiques Spéciales PC

Année scolaire 2007/2008

Semaine 17
27 mars 2008

1 Programme de Colles

1.1 Espaces pré-hilbertiens

1.1.1 Espaces pré-hilbertiens réels

- Produit scalaire
- Orthogonalité
- Projecteurs orthogonaux
- Espaces euclidiens

1.1.2 Cas des espaces pré-hilbertiens complexes.

1.1.3 Étude des endomorphismes dans les espaces vectoriels euclidiens

- Endomorphismes orthogonaux
- Endomorphismes autoadjoints

1.1.4 Équation réduite d'une conique

1.2 Intégrale sur un intervalle quelconque

1.2.1 Intégrales impropres

- Fonctions à valeurs positives
- Comparaison à une série numérique
- Cas des fonctions à valeurs réelles et complexes

1.2.2 Fonctions intégrables

1.2.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

2 Exercices

2.1 Espaces pré-hilbertiens

Exercice 1
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(A|B) = \mathrm{tr}(A^t B)$ défini un produit scalaire sur E.
   On considère par la suite que E est muni de ce produit scalaire.
2. Soit $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les applications $\varphi_P : A \mapsto AP$ et $\psi_P : A \mapsto P^{-1}AP$ sont orthogonales.
3. Réciproquement, si φ_P (resp. ψ_P) appartient à $\mathscr{O}_n(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, peut-on affirmer que $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$?

2.2 Intégrale sur un intervalle quelconque

Exercice 2
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in]0; +\infty[\qquad f_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{1+t} e^{-xt} \, \mathrm{d}t$$

On s'assurera de l'existence de $f_n(x)$.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in]0;+\infty[\qquad f_{n+1}(x) + f_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et que
$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in]0;+\infty[\qquad -f_n'(x) + f_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Exercice 3
Trouver un équivalent simple de

$$I_n = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} x^n \ln(1+x^n) \,\mathrm{d}x$$

lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Solution. Faire un changement de variable. □

Exercice 4
Convergence puis calcul de $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} \,\mathrm{d}x$.

Solution. Prolongeable par continuité en 0, donc intégrable, et $o(1/x^2)$ en $+\infty$ donc intégrable aussi. Pour le calcul, on remarque qu'avec le changement de variable $u = 1/x$, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} \,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^1 \frac{u \ln u}{(u^2+1)^2} \,\mathrm{d}u$$

Par conséquent $I = 0$. □

Exercice 5
Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \,\mathrm{d}x$ et de $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) \,\mathrm{d}x$

Solution. Pour étudier la convergence en $\pi/2$ de J, le plus simple est de faire un changement de variable $u = x - \pi/2$, ce qui au passage nous montre que $I = J$.

Calculons maintenant $I + J$: □

Exercice 6
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p$.

Solution. On trouve $\|f\|_\infty$. □

Exercice 7
Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t} \,\mathrm{d}t$.

Solution. $\frac{\pi}{2}$. □

Exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, notons $(P|Q) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} P(t)Q(t)e^{-t} \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale converge.
2. Montrer que $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est un produit scalaire.
3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution. □