Lycée Lavoisier
Mathématiques Spéciales PC

Année scolaire 2007/2008

Semaine 9-10
6 janvier 2008

1 Programme de Colles

- Déterminants
  - Déterminant de n vecteurs
  - Déterminant d'un endomorphisme
  - Déterminant d'une matrice carrée
  - Applications des déterminants
  - Systèmes d'équations linéaires
- Réduction des endomorphismes
  - Sous espaces stables, polynômes d'endomorphismes
  - Réduction d'un endomorphisme ou d'une matrice
  - Pratique de la réduction et applications

2 Exercices

2.1 Déterminants

Exercice 1

1. On suppose $a \neq b$, calculer $\Delta_{(a,b)} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & b \\ & \ddots & \\ a & & \lambda_n \end{vmatrix}$
2. En déduire le cas $a = b$.

Solution.

1. Étudier le degré du polynôme $P(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & & b - X \\ & \ddots & \\ a - X & & \lambda_n - X \end{vmatrix}$.

   En calculant $P(a)$ et $P(b)$, on détermine P et donc aussi $P(0) = \Delta_{(a,b)}$.
2. Le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice, il est donc continu. On peut passer à la limite, qui est en fait une dérivée.

$\square$

Exercice 2
Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagnon.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

Solution. Remarquer que $P(M) = 0$. $\square$

Exercice 3 (Vandermonde)
Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels. On appelle déterminant de Vandermonde le déterminant suivant

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que $V_n(a_1, \dots, a_n) = 0$ lorsque $a_1, \dots, a_n$ ne sont pas tous distincts.
   (b) On suppose $a_1, \dots, a_n$ tous distincts. On pose $P(x) = V_{n+1}(a_1, \dots, a_n, x)$. En développant, montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, et donner son coefficient dominant.
   En déduire que $P(x) = V_n(a_1, \dots, a_n)(x - a_1) \dots (x - a_n)$.
   (c) Montrer que $V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.
2. Pour a, b, c réels, factoriser le déterminant suivant :

$$\Delta(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

   en remarquant que c'est un mineur d'ordre 4 de $V_5(a, b, c, d, x)$.
3. On appelle matrice circulante d'ordre n une matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

   On pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$, où $z_1, \dots, z_n$ sont les racines n-ièmes de l'unité.
   (a) On pose $f(z) = a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1}$. Calculer MU, en déduire que $\det M = f(z_1) f(z_2) \dots f(z_n)$.
   (b) Calculer $\det M$ lorsque $a_p = p$ pour tout p.

Solution.
1. (a) Si deux a_i sont identiques, la matrice aura deux colonnes identiques. Le déterminant sera donc nul.
   (b) En développant par rapport à la dernière colonne, on montre que $\deg P \leq n$ et que le coefficient dominant n'est autre que le mineur des n premières lignes et des n premières colonnes, c'est à dire $V_n(a_1, \dots, a_n)$.
   D'après la question 1.(a), P a pour racine les a_i, qui ont été supposés tous distincts. Par conséquent P est de degré exactement n et $P(x) = V_n(a_1, \dots, a_n)(x - a_1) \dots (x - a_n)$
   (c) Par récurrence.
2. En développant le déterminant $V_5(a, b, c, d, x)$ par rapport à la dernière colonne on remarque que $\Delta(a, b, c, d)$ est le coefficient de x^3 dans le polynôme $P(x) = V_5(a, b, c, d, x)$. D'après la question précédente, ce coefficient est $\Delta(a, b, c, d) = (a + b + c + d) V_4(a, b, c, d)$.

$\square$

Exercice 4
Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & & \\ 3 & 3 & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & & \cdots & & n \end{vmatrix}$.

Solution. Tester les premiers cas puis montrer par récurrence, ou bien faire des opérations sur les lignes et les colonnes puis calculer directement. □

Exercice 5
Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.

Solution. Sens direct évident. Réciproquement, $1/(\det M) \times {}^t\tilde{M}$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ donc M est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. □

2.2 Réduction

Exercice 6
Trouver deux matrices diagonalisables de somme non diagonalisable. Trouver deux matrices diagonalisables de produit non diagonalisable.

Solution.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$. On note

$$A = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid P(M) = 0\}$$

Démontrer que A est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et non compacte.

Solution. □

Exercice 8
On note A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire l'anticommutant de A, c'est-à-dire

$$\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$$

Solution.

1. $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer dans la base de diagonalisation. On trouve $\{0\}$.

□

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$. On note $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad f(M) = \operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Établir que f est diagonalisable.

Solution.

1. L'application tr est linéaire, de même que le produit externe.
2. On remarque que $f(A) = 0$. Donc $\operatorname{Vect}(A) \subset \operatorname{Ker} f$. De plus $f(M) = 0$ implique $M = (\operatorname{tr}(M)/\operatorname{tr}(A))\, A$ par conséquent $M \in \operatorname{Vect}(A)$. D'où $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Vect}(A)$, et en conclusion $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(A)$.

   $\operatorname{tr} f(M) = 0$, donc $\operatorname{Im} f$ est inclue dans le noyau de la forme linéaire tr. De plus, par la formule du rang, $\operatorname{Im} f$ est de codimension 1, ce qui nous donne l'égalité : $\operatorname{Im} f = \operatorname{tr}^{-1}(0)$.

□

Exercice 10

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

1. Trouver le polynôme caractéristique de A.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[T]$ un polynôme. Montrer qu'il existe des nombres réels a, b et c tels que
$$P(A) = aA^2 + bA + cI_3.$$
3. Exprimer a, b, et c en fonction de $P(1), P(-1)$ et $P'(-1)$.
4. En déduire qu'il existe des matrices X, Y et Z telles que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a
$$P(A) = P(1)X + P(-1)Y + P'(-1)Z.$$
5. Calculer A^{100}.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'ordre n.

1. Rappeler la définition d'une application linéaire nilpotente d'ordre k. Donner le polynôme caractéristique de u.
2. Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$, montrer que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ forme une base de E.
3. Déterminer la matrice de u dans cette base.

Solution.

1. $u^k = 0$ et $u^{k-1} \neq 0$. Polynôme caractéristique : soit par l'absurde (on suppose qu'il y a une valeur propre non nulle) soit parce que le polynôme minimal (ici X^n) divise le polynôme caractéristique, qui est de degré n.
2. Par l'absurde, on suppose la famille liée. Si i_0 est le plus petit indice tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$, on compose par u^{n-i_0-1} dans l'égalité $u^{i_0}(x) = 1/\lambda_{i_0} \sum_{i>i_0} \lambda_i u^i(x)$, ce qui nous donne $u^{n-1}(x) = 0$, donc une contradiction.
3. Pour $i < n$, $u(e_i) = e_{i+1}$, et $u(e_n) = 0$.

$\square$