Lycée Lavoisier
Mathématiques Spéciales PC

Année scolaire 2008/2009

Semaine 5-6
20 octobre 2008

1 Programme de Colles

1.1 Espaces vectoriels normés

- Normes
- Suites convergentes
- Topologie
- Equivalences de normes
- Relations de comparaison

1.2 Suites et séries dans les espaces vectoriels normés de dimension finie

- Suites
- Application aux séries
- Séries numériques complexes

2 Exercices

2.1 Espaces vectoriels normés

Exercice 1 (cours)
Toutes les normes sont équivalentes dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2
Soit $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $g \in E$ fixé. Notons $N_g(f) = \|fg\|_\infty$.

1. Conditions sur g pour que N_g soit une norme.
2. Conditions sur g pour que N_g soit équivalente à $\|.\|_\infty$.

[Les deux exercices suivants ne sont pas adaptés au programme, ils ne sont là que pour mes archives personnelles]

Exercice 3
Soit $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$. Notons $H = \{f | \forall x \in [a,b] f(x) \neq 0\}$.

1. Montrer que H est un ouvert.
2. Montrer que $\varphi : f \mapsto 1/f$ est une application continue de H dans E.

Exercice 4
Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\lim_n \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe. On la notera $\rho(f)$.
2. Montrer que $\rho(f)$ est indépendant du choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. $\rho(fg) = \rho(gf)$.
4. Si f est diagonalisable, que représente $\rho(f)$?

2.2 Suites et séries dans les espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 5
Soit $u_0 \in \mathbb{R}^2$ (donc u_0 est un *vecteur*), et f la rotation d'angle θ.

1. Étudier la série de terme général $u_{n+1} = \frac{1}{2} f(u_n)$.
2. Étudier la série de terme général $v_n = \frac{1}{n} f^n(u_0)$.

[un peu hors du programme :]

Exercice 6

1. Étudier la série de terme général $x^n/n!$, où $x \in \mathbb{R}$ fixé.
2. Montrer que l'on peut définir $\exp(M)$, où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\exp(M)$ est un polynôme en M.