Lycée Lavoisier
Mathématiques Spéciales PC

Année scolaire 2007/2008

Semaine 3-4

1 Programme de Colles

1.1 Suites à termes réels

- Révisions Maths Sup
- Suites adjacentes. Développement décimal d'un réel.
- Suites usuelles classiques
- Suites récurrentes

1.2 Séries de nombres réels

- Propriétés générales
- Opérations (somme,produit par un nombre réel)
- Séries à termes positifs (critères de comparaison, d'Alembert, séries de Riemann)
- Séries alternées
- Série produit de 2 séries absolument convergentes.

2 Exercices

2.1 Suites

Exercice 1

Des suites simplifiables en vrac.

1. Soit (a_n) une suite à termes positifs, calculer

$$p_k = \prod_{k=0}^{n} \frac{a_k a_{k+2}}{a_{k+1}^2}$$

2. Étudier

$$a_n = n!\left(1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \ldots - \frac{n-1}{n!}\right)$$

Exercice 2 (Césaro)

1. Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers une limite ℓ. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge, et que sa limite est ℓ.
2. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.
   (a) Convergence et limite de la suite (u_n).
   (b) Soit $u_0 > 0$ fixé. Trouver un réel α tel que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ existe et soit non nulle.
   (c) Appliquer Césaro (question 1) pour trouver un équivalent de (u_n).

Solution.

1. Césaro.
2. (a) Quel que soit u_0, $u_1 \in [-1; 1]$ et sinus est contractante sur cet intervalle, de point fixe 0. Donc $\lim_n(u_n) = 0$.

(b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc on peut effectuer le DL suivant :

$$u_{n+1}^\alpha = (\sin(u_n))^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^3}{3!} + o(u_n^3)\right)^\alpha = u_n^\alpha \left(1 + \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^\alpha = u_n^\alpha + \frac{\alpha}{6} u_n^{\alpha+2} + o(u_n^{2+\alpha})$$

Donc la limite existe et est non nulle pour $\alpha = -2$.

(c) Si $\ell = -\frac{1}{3}$ est la limite précédente, la somme de Césaro est télescopique et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha) \sim \frac{1}{n}(u_{n+1}^\alpha) \sim \ell$$

D'où $u_n = (\ell n)^{\frac{1}{\alpha}} + o(n^{\frac{1}{\alpha}})$.

$\square$

Exercice 3
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs tels que $a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall n, m$.
Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}a_n\right)$ converge et que sa limite est $\inf\left\{\frac{1}{p}a_p \mid p \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2.2 Séries

Exercice 4
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < \beta \leq 1 < \alpha$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta}, \quad u_n = \frac{R_n}{S_n}, \quad v_n = (-1)^n u_n$$

1. (a) Trouver des équivalents simples de R_n et S_n lorsque n tend vers l'infini.
   (b) Étudier la nature de la série de terme général u_n.
2. Montrer que la série de terme général v_n converge.

Exercice 5
Des séries numériques en vrac :

1. Un DL de type $1/(1+u)$ ou assimilé, puis parfois une série alternée plus une série absolument convergente.
   (a) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$.
   (b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n+1}}$.
   (c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\ln(n)}$
   (d) $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}$,
2. Des calculs exacts avec des séries télescopiques.
   (a) $u_n = \frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}$ convergence et somme (décomposition en éléments simples).
3. Toujours passer à l'exponentielle.
   (a) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.
   (b) $u_n = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$ selon les valeurs des réels x et y.
   (c) $u_n = \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
   (d) $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$

(e) $u_n = n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1$

4. Divers

   (a) $u_n = \frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\sin(\frac{1}{n})}$.

Exercice 6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, v_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}, w_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la série de terme général u_n est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général v_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.
3. Pour quelles valeurs de α la série de terme général w_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

Solution.

1. Cours. $\alpha > 1$.
2. Série télescopique. $\alpha \geq 0$. Si $\alpha = 0$, $\ell_0 = 0$, sinon $\ell_\alpha = 1$.
3. Série télescopique, la somme est $v_1 - v_{n+1} = 1 - 1/2^\alpha - v_{n+1}$. DL. $\alpha \geq -1$. $\ell_{-1} = 0$, sinon $\ell_\alpha = 1 - 1/2^\alpha$.

□

Exercice 7

Des comparaisons de convergence, en vrac. On suppose $a_n > 0$.

1. la série de terme général a_n et celle de terme général $\frac{a_n}{1+a_n}$.
2. la série de terme général a_n et celle de terme général $\frac{1}{n}\sqrt{a_n}$.

Solution.

1. Comparer a_n et $a_n/(1+a_n)$ consiste juste à encadrer $1/(1+x)$. Si x varie dans un intervalle borné $[0; A]$, $1/(1+A) \leq 1/(1+x) \leq 1$. Si a_n n'est pas borné, on peut trouver une suite extraite a_{φ_n} qui tends vers l'infini, et $a_{\varphi_n}/(1+a_{\varphi_n})$ ne tends pas vers 0. Donc la série des $a_n/(1+a_n)$ diverge.
2. Cauchy-Schwarz et contre exemple.

□

Exercice 8

Soit (u_n) une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $\lim u_n = 0$ et que $\sum n(u_n - u_{n+1}) = \sum u_n$.
2. Calculer $S_p = \sum \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)}$.