Lycée Lavoisier
Mathématiques Spéciales PC

Année scolaire 2008/2009

**Semaine 1**

# 1 Programme de Colles

## 1.1 Rappels d'algèbre linéaire. Programme de Maths-Sup

## 1.2 Sous espaces vectoriels

- Somme directe de sous-espaces vectoriels
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires
- Projections et symétries vectorielles

## 1.3 Applications linéaires

- Théorème du rang
- Hyperplans
- Trace d'un endomorphisme ou d'une matrice

# 2 Exercices

**Exercice 1**
Soit $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels, et $f \in L(E,F)$. On note

$$A_f = \{g \in L(F,E) \mid f \circ g \circ f = 0\}$$

1. Montrer que $A_f$ est un sous espace vectoriel de $L(F,E)$.
2. Montrer que, si $f$ est injective, alors

$$A_f = \{g \in L(F,E) \mid \mathrm{Ker}(g) \supset \mathrm{Im}(f)\}$$

3. Montrer que, si $f$ est surjective, alors

$$A_f = \{g \in L(F,E) \mid \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)\}$$

**Exercice 2**
On note $E = C^0([0;1];\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on note $T(f) : [0;1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in [0;1] \qquad T(f)(x) = \int_0^x f(4(t-t^2))\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $T(f)(x)$ est bien définie pour tout $x \in [0;1]$.
2. Montrer que $T$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$.
3. L'endomorphisme $T$ est-il injectif ? Surjectif ?

**Exercice 3**
Soit $\alpha \in K$ un scalaire, $L \in \mathscr{M}_{1,n}(K)$ une matrice ligne et $C \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ une matrice colonne. On note

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & I_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A$ inversible si et seulement si $\alpha - LC \neq 0$

2. Calculer $A^{-1}$ lorsque $A$ est inversible.

**Exercice 4**
$A$ de rang 1, montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

**Exercice 5**
Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = -M + \mathrm{tr}(M)A$.

1. On suppose que $\mathrm{tr}(A) \neq 1$, montrer que $f$ est bijective.
2. On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 1$, déterminer $\mathrm{Ker}\, f$. Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \{M \mid \mathrm{tr}\, M = 0\}$.
3. Résoudre $f(X) = B$.
4. Diagonaliser $f$. (indication à base de polynôme annulateur ?).

**Solution.** □

**Exercice 6**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f + g$ est inversible, et que $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = \dim E$.

**Solution.** Il suffit de montrer que $\mathrm{rg}\, g = \dim \mathrm{Ker}\, f$. Déjà, $f \circ g = 0$, donc $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$. De plus $f+g$ inversible, donc pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)+g(y)$. D'où $x \in \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f$ d'après ci-dessus. Le théorème du rang prouve que la somme est directe : $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$. Or $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$, donc $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g \subset E$
$f + g$ inversible implique $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = E$ donc $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g = E$ et le résultat voulu. □

**Exercice 7**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme $g$ de $E$ et un projecteur $p$ tels que $f = g \circ p$.

**Solution.** On écrit la matrice de $f$ dans une base d'un supplémentaire du noyau au départ, et dans une base ad hoc de l'image à l'arrivée. Il suffit de compléter la matrice (de façon inversible) sur le noyau pour obtenir la matrice de $g$. □

**Exercice 8**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $f^2 = 0$ si et seulement si $\exists g, h \in \mathscr{L}(E) g \circ h = f$ et $h \circ g = 0$.

**Solution.** Comparer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$. □

**Exercice 9**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in K$, $L$ une matrice ligne de taille $n$ et $C$ une matrice colonne de taille $n$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & I_n \end{pmatrix}$$

Montrer que $A$ est inversible si et seulement si $\alpha - LC \neq 0$. Calculer $A^{-1}$ dans ce cas.

**Solution.** Commencer par $n = 1$ et calculer explicitement $A^{-1}$. □