Lycée Louis le grand
Mathématiques Supérieure MPSI

Année scolaire 2007/2008

Semaine 23
11 mai 2009

1 Programme de Colles : espaces euclidiens.

1.1 Produit scalaire.

Définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, norme et distance associés. Propriétés : inégalité de Cauchy-Schwarz, triangulaire. Orthogonalité, orthogonal d'un sous espace vectoriel, propriétés. Famille orthogonale.

1.2 Espaces vectoriels euclidiens.

Définition d'un espace vectoriel euclidien : $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Base orthonormée, expression du produit scalaire dans une BON. Orthogonalisation de Gram-Schmidt. Supplémentaire orthogonal. Projections et symétries orthogonales, caractérisation des projections orthogonales par la relation $(p(x)|y) = (x|p(y))$. Expression dans une BON.

Hyperplans. Toute forme linéaire s'écrit $x \mapsto (u|x)$. Équation d'un hyperplan. Réflexions (vectorielles). Existence et unicité d'une réflexion échangeant a et b si $\|a\| = \|b\|$.

1.3 Groupe orthogonal.

Définition d'un endomorphisme orthogonal. Equivalence entre $f \in \mathscr{O}(E)$ et $\forall x \in E; \|f(x)\| = \|x\|$. Équivalence entre f orthogonale et l'image d'une BON est une BON. Groupe orthogonal.

Matrices orthogonales i.e. telles que ${}^tAA = I_n$. Caractérisations d'une matrice orthogonale. Groupe $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Groupe spécial orthogonal.

1.4 Étude des endomorphismes orthogonaux en dimension 2.

1.5 Étude des endomorphismes orthogonaux en dimension 3.

2 Petits

Exercice 1
Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie n, et u une similitude de rapport μ relativement à f σ-sesquilinéaire (où $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{k})$) non dégénérée. Montrer que $\mu^n = \det u \sigma(\det u)$.

Solution. Il suffit d'écrire la relation $f(u(x), u(y)) = f(x, y)$ sous forme matricielle puis de passer au déterminant. □

Exercice 2
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
2. Montrer que $\forall A, B$, $\|AB\| = \|A\|\|B\|$.
3. $I - A$ inversible si $\|A\| < 1$.
4. Montrer que les inversibles d'une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathscr{A}$ normée complète forment un ouvert.

Solution. □

Exercice 3
Soit E un ensemble fini de cardinal n, R une relation d'équivalence ayant r classes d'équivalences, et $m = \text{card}\{(i,j)/iRj\}$. Montrer que $n^2 \leq mr$.

Solution. C-S $\square$

Exercice 4
E euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $(f(x)|x) = 0$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

Solution. $\square$

Exercice 5 (vecteurs qui se tournent le dos)
Montrer que, si dans E euclidien, on peut trouver n vecteurs tels que $\forall i \neq j, (v_i|v_j) < 0$, alors $\dim E \geq n-1$.

Solution. rec. $\square$

Exercice 6
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et p une fonction à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ convenable définie sur I.

On pose, pour tout $(P,Q) \in (R[X])^2$, $(P|Q) = \int_I P(t)Q(t)p(t)\,\mathrm{d}t$. Soient P_n les polynômes obtenus en appliquant Gram-Schmidt à la base des X^n.

1. Montrer que P_n a toutes ses racines dans $Int(I)$ et qu'elles sont toutes simples.
2. Trouver deux suites réelles λ_n et μ_n telles que $P_n = (x+\lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$. Vérifier que $\mu_n > 0$.
3. Montrer alors (par récurrence) que P_n et P_{n-1} n'ont pas de racines communes.
4. Montrer enfin (toujours par récurrence) que les racines de P et celles de P_{n-1} sont entrelacées.

Solution. $\square$

Exercice 7

Solution. $\square$

3 Gros

4 Impairs