Lycée Louis le grand
Mathématiques Supérieure MPSI

Année scolaire 2007/2008

Semaine 21
2 avril 2008

1 Programme de Colles : déterminants.

1.1 Le groupe symétrique.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$. Soit$\sigma \in \mathcal{S}_n$ on note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, définition d'une transposition, d'un p-cycle, support d'un p-cycle. Toute permutation se décompose en produit de transpositions et en produit de p-cycles à supports disjoints.

Signature d'une permutation : $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$. La signature est un morphisme de groupes de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathbb{R}^*$. Expression de la signature en fonction du nombre d'inversions.

1.2 Applications multilinéaires.

Définition d'une application multilinéaire de $E^n \to F$, application alternée. Formule $\varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\dots,x_n)$. Principales propriétés.

1.3 Déterminant de n vecteurs dans une base.

Si $\dim E = n$ il existe une unique forme multilinéaire alternée φ telle que $\varphi(e_1,\dots,e_n) = 1$, on l'appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$. Formule :

$$\det{}_{\mathcal{B}}(V_1,\dots,V_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

Formule de changement de base et propriétés.

1.4 Déterminant d'un endomorphisme.

Le scalaire $\det_{\mathcal{B}} f(\mathcal{B})$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$, on l'appelle déterminant de f. Formule $\det_{\mathcal{B}} f(S) = \det f \det_{\mathcal{B}}(S)$, principales propriétés.

1.5 Déterminant d'une matrice carrée.

Définition : $\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$. Lien avec le déterminant dans une base et le déterminant d'un endomorphisme. Propriétés. Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne, cofacteur, comatrice. Formule : ${}^t\tilde{A}A = \det(A)I_n$.

Exemples de calcul de déterminant classiques : Vandermonde, tridiagonal,. . .

2 Petits

Exercice 1

1. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ s'injecte dans $\mathfrak{S}_{n+1}$ et dans $\mathfrak{A}_{n+2}$.
2. Montrer que pour tout groupe fini G il existe n tel G soit isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Solution.

1. bidouillage à la main.
2. Action de groupe (par exemple sur lui-même par translation).

$\square$

Exercice 2
Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & & \\ 3 & 3 & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & & \cdots & & n \end{vmatrix}$.

Solution. Tester les premiers cas puis montrer par récurrence, ou bien faire des opérations sur les lignes et les colonnes puis calculer directement. $\square$

Exercice 3

1. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.
2. À quelle condition existe-t-il une matrice dans $GL_n(\mathbb{Z})$ de première ligne $(a_1, \ldots, a_n)$?

Solution.

1. Sens direct évident. Réciproquement, $1/(\det M) \times {}^t\tilde{M}$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ donc M est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.
2. Théorème de Bezout.

$\square$

Exercice 4

1. Calculer le déterminant de la matrice M ayant des a au-dessus de la diagonale, des b en dessous, et des coefficients diagonaux quelconque $(x_1, \ldots, x_n)$. Dans un premier temps on fera le calcul lorsque $a \neq b$.
2. Calculer le déterminant de $|(\frac{1}{a_i+b_j})|$.

Solution.

1. Un classique : il faut poser $P(X) = M - X\,(1)$, où (1) est la matrice n'ayant que des 1 comme coefficients. En soustrayant la première colonne à toutes les colonnes, puis en regardant ce que donnerait un développement par rapport à la première colonne (sans faire les calculs explicites bien sûr !), on constate que $P(X)$ est de degré au plus 1. Il suffit donc de calculer $P(a)$ et $P(b)$ pour déterminer les coefficients de P, et en particulier $P(0)$.
2. Remplacer b_n par X, etc... un peu sur le modèle de ci-dessus.

$\square$

Exercice 5 (inégalité de Hadamard)
Montrer que $\det(M)^2 \leq \prod_j \left(\sum_i a_{i,j}^2\right)$. Déterminer le cas d'égalité.

Solution. $\square$

Exercice 6
Montrer que les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$.

Solution. $\square$

3 Gros

Exercice 7
On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver le polynôme caractéristique de A. Montrer que $\chi_A(A) = 0$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[T]$ un polynôme. Montrer qu'il existe des nombres réels a, b et c tels que
$$P(A) = aA^2 + bA + cI_3.$$
3. Exprimer a, b, et c en fonction de $P(1), P(-1)$ et $P'(-1)$.
4. En déduire qu'il existe des matrices X, Y et Z telles que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a
$$P(A) = P(1)X + P(-1)Y + P'(-1)Z.$$
5. Calculer A^{100}.

Exercice 8
Soit $\alpha \in K$ un scalaire, $L \in_{1,n} (K)$ une matrice ligne et $C \in_{n,1} (K)$ une matrice colonne. On note

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & I_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A inversible si et seulement si $\alpha - LC \neq 0$
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Solution. □

Exercice 9
Deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ le sont aussi sur $\mathbb{R}$.

Solution. Soit $P \in_n (\mathbb{C})$ tel que $MP = PM'$. Décomposons P en partie réelle et partie imaginaire $P = Q + iQ'$. Le polynôme $D() = \det(Q + \lambda Q')$ n'est pas le polynôme nul ($D(i) \neq 0$), donc il existe des valeurs λ tel qu'il soit non nul. La matrice $Q + \lambda Q'$ convient. □

4 Impairs

Exercice 10
Soit $g \in (E)$, calculer le déterminant de $f \mapsto gfg^{-1}$.

Solution. la matrice de l'application est une matrice diagonale blocs avec des g sur la diagonale. On remarquera sinon que le déterminant est un volume, et que la conjugaison ne change rien aux propriétés géométrique de l'espace (ça consiste par exemple juste à déplacer la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. □

Exercice 11
Soit E un **k**-espace vectoriel de dimension finie n, et u une similitude de rapport μ relativement à f σ-sesquilinéaire (où $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{k})$) non dégénérée. Montrer que $\mu^n = \det u \sigma(\det u)$.

Solution. Il suffit d'écrire la relation $f(u(x), u(y)) = f(x, y)$ sous forme matricielle puis de passer au déterminant. □