Lycée Louis le grand
Mathématiques Supérieure MPSI

Année scolaire 2007/2008

Semaine 20
23 mars 2009

1 Programme de Colles : Calcul matriciel.

1.1 Les matrices.

Définition du $\mathbb{K}$-ev $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Matrices : carrées, diagonales, triangulaires, identité. Définition des matrices élémentaires $E_{i,j}$, base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Produit de matrices, exemples, propriétés du produit : associativité, distributivité par rapport à la somme, relation avec le produit externe. Exemple du produit d'une matrice par une matrice élémentaire.

L'algèbre des matrices carrées $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, matrice inversible. Transposée d'une matrice, matrices symétriques, antisymétriques. Décomposition en somme directe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Propriétés de la transposée.

Trace d'une matrice carrée, $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

1.2 Matrices et applications linéaires.

Matrice colonne d'un vecteur dans une base, isomorphisme $x \mapsto M_B(x)$.

Matrice d'une application linéaire f par rapport aux bases B et B', isomorphisme $f \mapsto M_{B,B'}(f)$.

Théorème fondamental : la matrice de f par rapport aux bases B et B' est l'unique matrice M telle que

$$\forall x \in E; M_{B'}(f(x)) = M M_B(x)$$

Corollaires : matrice de $f \circ g$, f est un isomorphisme ssi M est inversible, équivalence M inversible avec M inversible à droite ou à gauche.

Formules de changement de base. Définition de la matrice de passage d'une base à une autre. Propriétés, application à l'inversion d'une matrice carrée. Divers formules de changement de bases, vecteurs, applications linéaire, endomorphismes.

1.3 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.

1.4 Rang d'une matrice.

1.5 Systèmes linéaires.

2 Petits

Exercice 1
A de rang 1, montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$.

Solution. Si A est de rang 1, alors ses colonnes forment une famille de rang 1, c'est à dire qu'elles s'expriment toutes en fonction d'un même vecteur colonne U : $\exists U, V \in (\mathbb{R}^n)^2$ $A = U^tV$. Par conséquent $A^2 = U^tVU^tV = U(\operatorname{tr} A)^tV = (\operatorname{tr} A)A$. $\square$

Exercice 2
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$. On note $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'application définie par

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad f(M) = \operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Solution.

1. L'application tr est linéaire, de même que le produit externe.
2. On remarque que $f(A) = 0$. Donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \ker f$. De plus $f(M) = 0$ implique $M = (\mathrm{tr}(M)/\mathrm{tr}(A))\, A$ par conséquent $M \in \mathrm{Vect}(A)$. D'où $\ker f \subset \mathrm{Vect}(A)$, et en conclusion $\ker f = \mathrm{Vect}(A)$.

   $\mathrm{tr}\, f(M) = 0$, donc $\mathrm{Im}\, f$ est inclue dans le noyau de la forme linéaire tr. De plus, par la formule du rang, $\mathrm{Im}\, f$ est de codimension 1, ce qui nous donne l'égalité : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{tr}^{-1}(0)$.

□

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotente d'ordre n.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$, montrer que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ forme une base de E.
2. Déterminer la matrice de u dans cette base.

Solution.

1. Par l'absurde, on suppose la famille liée. Si i_0 est le plus petit indice tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$, on compose par u^{n-i_0-1} dans l'égalité $u^{i_0}(x) = 1/\lambda_{i_0} \sum_{i>i_0} \lambda_i u^i(x)$, ce qui nous donne $u^{n-1}(x) = 0$, donc une contradiction.
2. Pour $i < n$, $u(e_i) = e_{i+1}$, et $u(e_n) = 0$.

□

Exercice 4

1. Quels sont les idéaux à droite (resp. à gauche) de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Quels sont les idéaux bilatères l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Le résultat reste-t-il vrai en dimension infinie ?

Solution.

1. Si $M \neq 0$ est dans $\mathscr{I}$ on peut promener le coefficient non nul partout à l'aide de matrices élémentaires (et par exemple obtenir I_n).
2. Les endomorphismes de rang fini forment un idéal différent de $\{0\}$ et de $\mathscr{L}(E)$.

□

Exercice 5
Calculer la puissance k-ième de la matrice de taille $n+1$ de terme général $\left(\binom{j}{i}\right)_{0 \leq i,j \leq n}$.

Solution. Les coefficients binomiaux font penser au développement d'une puissance, on se place donc sur $\mathbb{R}_n[X]$, et on considère l'application $P(X) \mapsto P(X+1)$ dans la base canonique. □

3 Gros

Exercice 6

1. Montrer que toute forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $N \mapsto \mathrm{tr}(MN)$ où M est une matrice uniquement déterminée.
2. Quelles sont les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $f(AB) = f(BA)$?

Solution.

1. L'application $\theta : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$ définie par $\theta(M) = (N \mapsto \mathrm{tr}(MN))$ est injective — il suffit de tester sur la base canonique $(E_{i,j})_{i,j}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$, par conséquent θ est bijective.
2. Notons $M = \theta^{-1}(f)$. Pour toutes matrices A, B, nous avons $\mathrm{tr}(MAB) = \mathrm{tr}(MBA)$. Par conséquent $\mathrm{tr}((BM - MB)A) = 0$. Ce qui entraîne $BM - MB = 0$ pour tout B. La matrice M commute à toutes les matrices, c'est une homothétie. Réciproquement, les formes linéaires de la forme $f = \lambda\,\mathrm{tr}$ conviennent.

□

Exercice 7

Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension n et $G = \{f_i \in \mathscr{L}(E) \mid 1 \leq i \leq p\}$ un ensemble d'applications linéaires inversibles stable pour la composition (donc un sous-groupe de $GL(E)$). Prouver que $\mathrm{tr}(\sum_{i=1}^{p} f_i) = 0\ [p]$.

Solution. Il faut connaître le théorème des noyaux :

$$\forall P, Q \in \mathbf{k}[X]\ \forall u \in \mathscr{L}(E) \qquad P \wedge Q = 1 \Longrightarrow \operatorname{Ker} P(u)Q(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$$

Notons $f = \sum_{i=1}^{p} f_i$. Nous avons le résultat classique, $f_i f = \sum f_i f_j = \sum f_k = f$, puisque $G =$ est un groupe. En sommant sur i, l'égalité précédente s'écrit $f^2 = pf$. C'est-à-dire $f(f - p\,\mathrm{Id}) = 0$. Par conséquent dans une base de la somme directe $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - p\,\mathrm{Id})$, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & p & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & p \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne le résultat voulu. □

Exercice 8

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout i, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout i, $\sum_j |a_{i,j}| < 1$. Montrer que l'équation $X = AX + B$, où $B \in \mathbb{C}^n$ est fixé, admet une solution unique.
3. Soit P une matrice stochastique — c'est-à-dire une matrice réelle à coefficients positifs vérifiant $\forall i\ \sum_j p_{i,j} = 1$. Montrer que $\sup\{\lambda \mid (P - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible}\} = 1$ et que ce sup est atteint. Montrer que les puissances d'une matrice stochastique sont stochastiques.

Solution.

1. Raisonnons par l'absurde, soit $X \in \operatorname{Ker} A$ non nul et soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max_i(|x_i|)$. $AX = 0$, par conséquent $\forall i, \sum_j a_{i,j} x_j = 0$. On isole $a_{i,i}$ et on passe aux valeurs absolues : $|a_{i,i}||x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j|$. En particulier en $i = i_0$, $|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}||x_{i_0}|$. Puisque, par construction, $|x_{i_0}| \neq 0$, l'inégalité se simplifie en $|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$ ce qui est contradictoire.

2. Nous cherchons à montrer que $I_n - A$ est inversible. L'hypothèse de l'énoncé peut s'écrire $1 - |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ (donc $1 - |a_{i,i}| \geq 0$). Or $|1 - a_{i,i}| > |1 - |a_{i,i}|| = 1 - |a_{i,i}|$. Par conséquent on peut appliquer le résultat de la question précédente.
3. C'est encore une fois un raisonnement du même type. Pour montrer qu'une puissance est toujours stochastique, il suffit de l'écrire et d'inverser deux sommes.

□

Exercice 9
Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ une application linéaire non constante. On suppose de plus que, pour tout couple de matrices (A, B), $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer qu'une matrice M est inversible si et seulement si $f(M) \neq 0$.

Solution. f est un morphisme non nul compatible avec la multiplication, par conséquent $f(I_n) = 1$ $(f(A.I_n) = f(A)f(I_n) = f(A))$. Si M est inversible, $f(MM^{-1}) = f(M)f(M^{-1}) = f(I_n) = 1$, donc $f(M) \neq 0$.

Réciproquement, □

Exercice 10 (dilatations)
Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit H un hyperplan de E et $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$ et $u \neq \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que « u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ » est équivalent à « $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \not\subset H$ ».
2. Montrer que si la propriété ci-dessus est vérifiée, alors $D = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$ et $H = \ker(u - \mathrm{Id})$.

Solution. □

Exercice 11 (transvections)
Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in GL(E)$.
$f \in E^* \setminus \{0\}$, $H = \mathrm{Ker}\, f$, $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$, $u \neq \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $D = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset H \iff \exists a \in H \setminus \{0\}\ \forall x \in E \quad u(x) = x + f(x)a$
2. Soit $x, y \in E$ libre, montrer que $\exists u$ transvection telle que $u(x) = y$.

Solution. □

Exercice 12
On appelle transvection dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{k})$ les matrices triangulaires avec des 1 sur la diagonale. Montrer que, pour tout $A \in GL_2(\mathbf{k})$, il existe des transvection $M_1, \ldots, M_n$ et un scalaire λ tels que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} M_1 \ldots M_n$.

Solution. $\lambda = \det A$. □