Lycée Louis le grand
Mathématiques Supérieure MPSI

Année scolaire 2007/2008

Semaine 19
24 mars 2008

1 Programme de Colles : Équations différentielles linéaires.

1.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre.

Résolution de l'équation homogène, recherche d'une solution particulière par variation de la constante. Exemples d'équations non linéaires : séparation des variables, équations de Bernoulli et Riccatti.

1.2 Équations diférentielles linéaires de second ordre.

L'ensemble des solutions est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$. Résolution de l'équation homogène dans le cas complexe puis dans le cas réel. Recherche d'une solution particulière pour un second membre polynôme-exponentielle. Principe de superposition.

1.3 Exemples d'équations intervenant en physique.

Les chaînettes. Vibrations forcées, résonance.

2 Petits

Exercice 1 (Gronwall)
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue et $a \in \mathbb{R}_+$. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $y(t) \leq a + \int_0^t y\varphi$. Montrer que $y(t) \leq a \exp \int_0^t \varphi \quad \forall t$.

Solution. □

Exercice 2
Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $|f| \leq g$, et soit y (resp. z) une solution $\mathscr{C}^1$ du problème différentiel $y' = f(y)$ (resp. $z' = g(z)$).
En supposant $|y(0)| \leq z(0)$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|y(x)| \leq z(x)$.

Solution. □

Exercice 3 (Wronksien)

1. Soit a, b et c des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$, et f et g deux solutions de l'équation $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$. Donner une expression de $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$ en fonction des conditions initiales et de a, b, c.
2. Soit $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $y'' + py = 0$ a une solution non bornée.

Solution.

1. $W(t)$ vérifie l'équation différentielle d'ordre 1 blabla.
2. Passer par le wronskien.

□

Exercice 4
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{+\infty} f' + f = 0$, montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

Solution. On pose $b = f' + f$. Résolvons l'équation différentielle associée : $f(x) = B(x)e^{-x}$, avec B une primitive de b. Majorons $f(x)$:

$$|f(x)| \leq \left(\int_a^x |b(t)| \, \mathrm{d}t \right) e^{-x} \leq \left(\int_a^X |b(t)| \, \mathrm{d}t \right) e^{-x} + \varepsilon(x - X)e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

3 Gros

Exercice 5
Soit f et g deux fonctions continues telles que $|f| < g$. Soit y et z des solutions respectives de $y' = f(y)$ et $z' = g(z)$. On suppose de plus que $|y(0)| \leq z(0)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|y(x)| \leq z(x)$.

Solution. $\square$

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue non constante, Montrer qu'il n'existe pas deux solutions indépendantes périodiques de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = f$.

Solution. Soit g_1 et g_2 deux solutions périodiques indépendante de l'équation, et T_1 et T_2 leurs périodes respectives. Alors T_1 et T_2 sont des périodes de f (il suffit d'écrire l'équation en remarquant que g_i' et g_i'' sont aussi de période T_i). Par conséquent f est constante sur le sous-groupe additif $G_{(T_1,T_2)}$ de $\mathbb{R}$ engendré par T_1 et T_2. Si celui-ci est dense, la continuité de f implique qu'elle constante. Donc $G_{(T_1,T_2)}$ est discret, de la forme $a\mathbb{Z}$, et il existe deux entiers n_1 et n_2 non nuls tels que $T_i = n_i a$. Nous avons trouvé une période $T = n_1 T_2 = n_2 T_1$ commune à g_1 et g_2.

Donc $g_1 - g_2$, qui est solution de l'équation homogène, est périodique de période T. Or les solutions non nulles de l'équation homogènes sont non bornées. Par conséquent $g_1 = g_2$, ce qui est absurde. $\square$