Lycée Louis le grand
Mathématiques Supérieure MPSI

Année scolaire 2007/2008

Semaine 14
9 mars 2009

1 Programme de Colles : Intégration sur un segment

1.1 Intégration des fonctions en escalier sur un segment.

Définition d'une subdivision d'un segment, application en escalier, structure de $\mathbb{K}$-algèbre de leur ensemble (noté $E(a, b)$). Intégrale d'une fonction en escalier, linéarité, positivité, Chasles. Définition de l'intégrale de Riemann :

$$\int_{[a,b]} f = \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in E(a, b) \text{ et } \varphi \leq f \right\}$$

Interprétation géométrique.

1.2 Intégration des fonctions continues par morceaux.

Définition d'une fonction continue par morceaux (CM) sur $[a, b]$), structure de $\mathbb{K}$-algèbre de l'ensemble $CM(a, b)$. Approximation d'une fonction CM par une fonction en escalier, toute fonction f CM est limite uniforme de fonctions en escalier. Toute fonction CM est intégrable, propriétés de l'intégrale des fonctions CM . Inégalité de la moyenne, Cauchy-Schwarz, équivalence $\int_{[a,b]} f = 0$ et $f = 0$ pour une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Relation de Chasles généralisée.

1.3 Méthodes de calcul d'une intégrale.

Théorème fondamental, tableau des primitives usuelles, intégration par parties (formule de Taylor avec reste intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange), changement de variable divers exemples en particulier pour la recherche d'une primitive.

1.4 Approximation d'une intégrale.

Sommes de Riemann notées $S_{\sigma,n}(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$, convergence vers l'intégrale dans le cas f continue, convergence en $O(1/n)$ si f est de classe $\mathscr{C}^1$. Méthode des trapèzes dans le cas $\mathscr{C}^2$, convergence en $O(1/n^2)$.

1.5 Intégration des fonctions $[a, b] \to \mathbb{C}$

Définition de l'intégrale des fonctions $CM([a, b], \mathbb{C})$, propriétés, extension du théorème fondamental et des méthodes de calcul, exemple : Lemme de Lebesgue.

2 Petits

Exercice 1
Déterminer la limite en 0 de $x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\, \mathrm{d}t$

Solution. Indication : les équivalents s'intègrent. La solution est $\ln 3$. $\square$

Exercice 2 (Hölder)

1. Montrer que $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est concave.
2. Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ continues. Montrer que

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \left(\int_{[a,b]} |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_{[a,b]} |g|^q \right)^{1/q}$$

Solution.

1. Juste pour mettre sur la piste pour la suite.
2. Nous allons montrer que $\int_{[a,b]} |fg| \leq \left(\int_{[a,b]} |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_{[a,b]} |g|^q \right)^{1/q}$. On suppose $|f|$ et $|g|$ d'intégrale non nulle. Notons $\tilde{f} = |f|^p / \left(\int_{[a,b]} |f|^p \right)$ et $\tilde{g}$ de même pour g. Il reste donc à prouver que $\int_{[a,b]} \tilde{f}^{1/p} \tilde{g}^{1/q} \leq 1$. Soit $x \in [a, b]$ tel que $\tilde{f}(x) \neq 0$ et $\tilde{g}(x) \neq 0$. La concavité du logarithme népérien s'écrit

$$\frac{1}{p} \ln \tilde{f}(x) + \frac{1}{q} \ln \tilde{g}(x) \leq \ln \left(\frac{1}{p} \tilde{f}(x) + \frac{1}{q} \tilde{g}(x) \right)$$

Par conséquent, en passant à l'exponentielle (qui est croissante), on obtient

$$(\tilde{f}(x))^{1/p} \times (\tilde{g}(x))^{1/q} \leq \frac{1}{p} \tilde{f}(x) + \frac{1}{q} \tilde{g}(x)$$

Cette inégalité est aussi vraie lorsque $\tilde{f}(x) = 0$ ou $\tilde{g}(x) = 0$, par conséquent nous pouvons intégrer sur $[a, b]$

$$\int_{[a,b]} \left((\tilde{f})^{1/p} (\tilde{g})^{1/q} \right) \leq \frac{1}{p} \int_{[a,b]} \tilde{f} + \frac{1}{q} \int_{[a,b]} \tilde{g} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

De plus $\displaystyle\int_{[a,b]} \left((\tilde{f})^{1/p} (\tilde{g})^{1/q} \right) = \int_{[a,b]} \left(\frac{|f|}{\left(\int_{[a,b]} |f|^p \right)^{1/p}} \frac{|g|}{\left(\int_{[a,b]} |g|^q \right)^{1/q}} \right)$ Ce qui prouve l'inégalité cherchée.

□

Exercice 3

Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues, et $h(x) = \int_a^b |f(t) + xg(t)| \, \mathrm{d}t$.

1. On suppose $f > 0$, montrer que h admet un minimum local en 0 implique $\int_{[a,b]} g = 0$.
2. Est-ce toujours vrai lorsque l'on suppose $f \geq 0$?

Solution.

1. Indication : g continue sur un segment.
   $h(0) = \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t) + xg(t)| \, \mathrm{d}t \qquad \forall |x| \leq \varepsilon$ Soit $c = \inf_{[a,b]} f > 0$ et $\varepsilon < c / \sup g$.
   Alors $f + xg \geq 0 \qquad \forall |x| \leq \varepsilon$.
2. Contre-exemple : $f = 0$ et $g = 1$.

□

Exercice 4 (Cesàro)

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue telle que $\lim_{+\infty} f = \ell$. Montrer que $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A} \int_0^A f(t) \, \mathrm{d}t = \ell$

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$ converge et est égal à $e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution.

1. Comme dans le cas des suites.
2. Passer par I^2 puis étudier le signe de $\Im(I)$.

$\square$

Exercice 5
Soit $h:]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = E(2/t) - 2E(1/t)$.

1. Montrer que h est intégrable sur $[\frac{1}{n+1};1]$ pour tout n.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^1 h(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution.

1.
2. solution : $2\ln 2 - 1$.

$\square$

Exercice 6 (inégalité de Hardy)

1.

Solution.

1.

$\square$

Exercice 7
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. À quelles conditions a-t-on $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
2. Même question si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Solution.

1. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
   Pour tout t, $f(t) \leq |f(t)|$, par conséquent $0 \leq f(t) - |f(t)|$, d'où
   $$\int_{[0,1]} (f - |f|) = 0 \Longrightarrow (f - |f|) = 0$$
   Donc $f = |f|$.
   En conclusion, la condition est $f = |f|$ ou $f = -|f|$.
2. On s'inspire de la question précédente. Notons θ un argument de $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, et $g = e^{-i\theta}f$.

$\square$

Exercice 8
Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ définie par $f(x) = x_\sigma = \sum_{i\geq 0} a_{\sigma(i)}10^{-i}$ où $x = \sum_{i\geq 0} a_i 10^{-i}$ et σ est une permutation fixée.

1. Montrer que f est intégrable.

2. Montrer que $\int_{[0,1]} f = 1/2$.

Solution.

1.

$\square$

Exercice 9 (Jensen)
Soit $\alpha < \gamma < \beta$ et $f :]\alpha; \beta[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que f' soit croissante.

1. Montrer que $\forall t \in]\alpha; \beta[\ f(t) \geq f(\gamma) + (t - \gamma) f'(t)$.
2. Jensen.

Solution.

1.

$\square$

Exercice 10
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\forall g \in \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ avec $g(a) = g(b) = 0$, $\int_a^b f(t) g'(t) \, \mathrm{d}t = 0$.
Déterminer les f qui conviennent.

Solution. Constantes. $\square$

Exercice 11
Soit $u \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $u(a) = u(b) = 0$ et, pour tout $t \in]a, b[$, $u(t) > 0$. On suppose $\int_{[a,b]} \left| \frac{u''}{u} \right|$ (cette hypothèse n'est en fait pas nécessaire).

1. Montrer que $\int_{[a,b]} \left| \frac{u''}{u} \right| > \frac{1}{\|u\|} \sup_{a < t_1 < t_2 < b} |u'(t_2) - u'(t_1)|$.
2. Montrer que $\int_{[a,b]} \left| \frac{u''}{u} \right| > \frac{4}{b-a}$.

Solution.

2. u continue sur $[a, b]$ conpact, TAF.

$\square$

Exercice 12
Soit $f \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $0 < f' \leq 1$. Montrer que $\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t \geq \int_0^1 f^3(t) \, \mathrm{d}t$.