Lycée Louis le grand
Mathématiques Supérieure MPSI

Année scolaire 2007/2008

Semaine 12
11 mai 2009

1 Programme de Colles : Espaces vectoriels.

On note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Axiomes d'espace vectoriel.

Loi de composition externe. Définition d'un espace vectoriel. Propriétés. Principaux exemples : $\mathbb{K}^n$, applications $X \to E$ ou E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, suites, polynômes.

1.2 Sous-espaces vectoriels.

Un sous espace vectoriel est une partie de E non vide et stable par combinaison linéaire. Principaux exemples.

1.3 Combinaisons linéaires.

Soit $A \subset E$ finie, on note $\text{Vect}\{A\}$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A. Extension au cas A infini. $\text{Vect}\{A\}$ est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant A. Droite vectorielle, plan vectoriel.

1.4 Applications linéaires.

Définition, premières propriétés. Définitions d'un endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, espaces vectoriels isomorphes. Noyau et image d'une application linéaire, caractérisation d'une application injective ou surjective. L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{F}(E, F)$, composition d'applications linéaires. Groupe linéaire $GL(E)$.

1.5 Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition de $F + G$ où F et G sont des sous espaces vectoriels de E. Sous espaces vectoriels supplémentaires, caractérisation.

1.6 Projection et symétrie vectorielle.

Définition d'une projection, p une application linéaire est une projection si et seulement si $p \circ p = p$, alors p est la projection sur son image parallèlement à son noyau. Résultats analogues pour les symétries.

2 Petits

Exercice 1
Montrer que le complémentaire d'un sous espace vectoriel propre n'est pas un sous espace vectoriel, même si on rajoute 0.

Solution. $\square$

Exercice 2
Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions affines forme un sous espace vectoriel de E.
2. Trouver un supplémentaire de ce sous espace vectoriel.

Solution.

$$\{f \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

□

Exercice 3
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

1. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \circ f \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$
2. $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g \circ f \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = E$
3. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$

Solution.

1. Sens direct : si $x \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$, alors il existe $y \in E$ tel que $g(x) = g(f(y)) = 0$ donc $y \in \operatorname{Ker} g \circ f = \operatorname{Ker} f$ d'où $x = f(y) = 0$.
   Réciproquement : $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$ est évident, et si $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$, alors $f(x) \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ donc $x \in \operatorname{Ker} f$.
2. Sens direct : si $x \in E$, il existe $x_1 \in E$ tel que $g(x) = g(f(x_1))$, et la décomposition $x = (x - f(x_1)) + f(x_1)$ convient.
   Réciproquement : si $x = x_1 + x_2$, alors $g(x) = 0 + g(x_2) \in \operatorname{Im} g \circ f$.
3. Application immédiate de ci-dessus.

□

Exercice 4
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f si et seulement si$\exists x \neq 0 \ / \ f(x) = \lambda x$.

Soit λ une valeur propre de f, montrer que

1. $f \circ f = f \Longrightarrow \lambda = 0$ ou 1.
2. $f \circ f = \mathrm{Id} \Longrightarrow \lambda = 1$ ou -1.
3. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ fixé, $P(f) = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = 0$.

Solution. □

Exercice 5
Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$. Montrer que, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u) = E$.

Solution. On écrit Bezout : il existe U et V tels que $PU + QV = 1$. D'où la décomposition $x = x_1 + x_2$ et $\operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u) = 0$. □

Exercice 6
Soit $f \in \hom_{\mathbb{R}-\mathrm{ev}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

1. Montrer que $\exists!(u, v) \in \mathbb{C}^2 / \forall z \in \mathbb{C}\ f(z) = uz + v\bar{z}$.
2. Montrer que f bijective $\Longleftrightarrow |u| \neq |v|$.
3. Si $u \neq 0$ et w est une racine carré de v/u, lorsque $|v| = |u|$, déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Solution. □

3 Gros

Exercice 7
Soit E un K-espace vectoriel.

1. Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels. Montrer que $E_1 \cup E_2$ sous espace vectoriel de E implique $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.
2. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous espaces vectoriels propres de E. Soit $p = \mathrm{Card}(I) - 1$. On suppose $p \geq 2$. Montrer que
   (a) $E = \bigcup_{i\in I} F_i \Longrightarrow \mathrm{Card}\, K \leq p$.
   (b) $\mathrm{Card}\, K = p \Longrightarrow \exists (F_i) \ / \ E = \bigcup_{i\in I} F_i$.

Solution. $\square$

Exercice 8
Montrer qu'un espace vectoriel sur un corps infini ne peut être une union finie de sous espaces vectoriels propres.

Solution. $\square$

Exercice 9
Soit E et F deux K-espaces vectoriels, et $f \in L(E, F)$. On note

$$A_f = \{g \in L(F, E) \mid f \circ g \circ f = 0\}$$

1. Montrer que A_f est un sous espace vectoriel de $L(F, E)$.
2. Montrer que, si f est injective, alors

$$A_f = \{g \in L(F, E) \mid \mathrm{Ker}(g) \supset \mathrm{Im}(f)\}$$

3. Montrer que, si f est surjective, alors

$$A_f = \{g \in L(F, E) \mid \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)\}$$

Solution.

$\square$

Exercice 10

1. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que
$$f \circ g = g \circ f \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} g(\mathrm{Ker}\, f) & \subset & \mathrm{Ker}\, f \\ g(\mathrm{Im}\, f) & \subset & \mathrm{Im}\, f \end{array}$$
2. Que dire de l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifie $\forall x \in E \ \exists \lambda \in K \ f(x) = \lambda x$?
3. Déterminer $\{u \in \mathscr{L}(E) \mid \forall v \in \mathscr{L}(E), \ u \circ v = v \circ u\}$

Solution.

1.
2. Soit $x, y \in E$ deux vecteurs non colinéaires. En utilisant la linéarité de l'application f on obtient $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Par conséquent $\lambda_x = \lambda_y$. L'égalité dans le cas de deux vecteurs x et μx colinéaires non nuls est immédiate : $f(\mu x) = \lambda_{\mu x} \mu x = \mu f(x) = \lambda_x \mu x$. Donc $\lambda_{\mu x} = \lambda_x$. Ainsi $\exists \lambda \in K \ \forall x \in E \ f(x) = \lambda x$, l'application f est une homothétie.

3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\forall v \in \mathscr{L}(E),\ u \circ v = v \circ u$. Soit $x \in E$ fixé, et p_x un projecteur sur $\mathrm{Vect}\{x\}$. On a donc $\mathrm{Im}\, p_x = \mathrm{Vect}\{x\}$.

   Par définition de u, $u \circ p_x = p_x \circ u$. Par conséquent, d'après la réponse à la première question, $u(\mathrm{Im}\, p_x) \subset \mathrm{Im}\, p_x$. C'est-à-dire $u(x) = \lambda_x x$. L'application u vérifie donc les hypothèses de la question 2, et est donc une homothétie.

   Réciproquement, une homothétie commute à toutes les applications linéaires.

□

Exercice 11
Soit p_1 et p_2 deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p_1 + p_2$ est un projecteur si et seulement si $p_1 p_2 + p_2 p_1 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. Montrer que $p_1 + p_2$ est un projecteur implique $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ en caractéristique différente de 2. Montrer que dans ce cas, on a $\mathrm{Im}\, p + q = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$ et $\mathrm{Ker}\, p + q = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.
3. Trouver un contre-exemple en caractéristique 2.

Solution.

2. $pq = p^2 q = -pqp$ et $qp = qp^2 = -pqp$ par conséquent $pq = qp$.

□

Exercice 12
Soit E et F deux espaces vectoriels. Si $s : E \to E$ est une application linéaire, on défini $\bar{s} : \mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{L}(E', F)$ par $u \mapsto u \circ s$.

1. Montrer que s bijective $\Longleftrightarrow \forall F \mathbf{k} - \text{ev},\ \bar{s} : \mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{L}(E', F)$ est bijective.
2. Montrer que $E' \to E \to E'' \to 0$ exacte $\Longleftrightarrow \forall F \mathbf{k} - \text{ev},\ \bar{s} : 0 \to \mathscr{L}(E'', F) \to \mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{L}(E', F)$ exacte.

4 Impairs

Exercice 13
Montrer le lemme des 5.

Exercice 14
Montrer le lemme du serpent. [conoyau].

Exercice 15

1. Vérifier que l'application $\mathrm{ad} : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(\mathscr{L}(E)) : f \mapsto (g \mapsto fg - gf)$ est linéaire.
2. Montrer que si f est nilpotent $\mathrm{ad}\, f$ l'est aussi ; trouver son indice de nilpotence en fonction de celui de f.

Exercice 16 (théorème de Maschke)
Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$ de cardinal r. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on pose $f' = 1/r \sum_{g \in G} g f g^{-1}$.

1. Montrer que f' commute avec G puis que $f' = f$ si et seulement si f commute avec G.
2. Montrer enfin que si h commute avec G alors $(fh)' = f'h$.
3. En déduire que si F est un sous-espace vectoriel stable par G, F admet un supplémentaire stable par G (on pourra prendre une projection p sur F et voir que $\mathrm{Im}\, p' = F$ puis que p' est une projection).

Solution.

1. Pour tout $g_0 \in G$, $g_0 \circ f' = 1/r \sum_{g \in G} g_0 g f g^{-1} = 1/r \sum_{g' \in G} g' f g'^{-1} g_0$, car $g \mapsto g_0 g$ est une bijection dans G.

   Si $f' = f$, on vient de montrer que f commute avec G. Réciproquement, si f commute avec G, alors $gfg^{-1} = f$ pour tout $g \in G$.

2. L'écrire.

3. Soit p un projecteur sur F, sous-espace stable par G. Pour tout $x \in F$, pour tout $g \in G$, $g^{-1}(x) \in F$ donc $g(f(g^{-1}(x))) = g(g^{-1}(x)) = x$. Ce qui entraîne, pour tout $x \in F$, $p'(x) = x$.

   Il reste à prouver que p' est un projecteur, c'est-à-dire que $p' \circ p' = p$. Soit $x \in E$, pour tout $g \in G$, $g(f(g^{-1}(x))) \in F$, donc $p'(x) \in F$. Ainsi $p'(p'(x)) = p'(x)$.

   En conclusion, p' est un projecteur sur F qui commute à G, donc son noyau (qui est un supplémentaire de F) est stable par G.

$\square$