Lycée Louis le grand — Année scolaire 2007/2008
Mathématiques Supérieure MPSI

Semaine 6
12 novembre 2009

1 Programme de Colles

1.1 Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Structure de corps, compatibilité avec la relation d''ordre, propriété de la borne supérieure, ensemble $\mathbb{R}$. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties convexes. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Partie entière.

1.2 Suites de nombres réels.

Limite d'une suite, propriétés, opérations sur les limites. Limites et inégalités, théorème d'encadrement, applications. Suites extraites, propriétés, valeur d'adhérence d'une suite.

1.3 Relations de comparaison.

Définitions, notations classiques. Comparaison des suites de référence, croissances comparées. Application des équivalents à la recherche de limites.

1.4 Existence d'une limite.

Les suites monotones et bornées sont convergeantes. Suites adjacentes. Valeur d'adhérence. Théorème de Bolzano-Weierstrass, preuve par dichotomie. Critère de Cauchy.

1.5 Développements asymptotiques.

Divers exemples.

1.6 Suites de nombres complexes.

Brève extension aux suites complexes des paragraphes précédents.

2 Petits

Exercice 1
Exercice. Soient (u_n) et (v_n) des suites rélles qui tendent vers 0, avec (v_n) strictement décroissante. On suppose de plus $\frac{u_n-u_{n+1}}{v_n-v_{n+1}} \to \ell$. Montrer que $\frac{u_n}{v_n} \to \ell$.

Solution. Écrire l'encadrement $\left|\frac{u_n-u_{n+1}}{v_n-v_{n+1}} - \ell\right| \leq \varepsilon$ sous la forme

$$(\ell-\varepsilon)(v_n - v_{n+1}) \leq u_n - u_{n+1} \leq (\ell+\varepsilon)(v_n - v_{n+1})$$

Puis sommer p fois, et passer à la limite $p \to +\infty$. □

Exercice 2
Soit u_n une suite croissante dont une sous-suite converge. Montrer que u_n converge.

Solution. Majorer u_n. □

Exercice 3
Soit u_n une suite telle que u_{2n}, u_{3n} et u_{2n+1} convergent. Montrer que u_n converge.

Solution. Considérer les suites extraites « intersections » de celles données par l'énoncer pour montrer que toutes les limites sont égales. De plus u_{2n} et u_{2n+1} couvrent tous les u_n. $\square$

Exercice 4
Soit p_n et q_n deux suites d'entiers, avec $q_n > 0$. On suppose que $p_n/q_n \to \alpha$ irrationnel. Montrer que $|p_n|$ et q_n tendent vers $+\infty$.

Solution. Si l'une des deux suites tends vers une limite finie, l'autre aussi et α est rationnel. De plus une suite qui ne tends pas vers $+\infty$ admet une sous-suite bornée, qui elle même admet une sous-suite convergente. $\square$

Exercice 5
On pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$. Montrer que les deux suites sont adjacentes et convergent vers une limite que l'on notera e. Montrer que e est irrationnel. Étudier la convergence de $\sin(2\pi n!e)$.

Solution. Irrationnel : utiliser l'encadrement $n!u_n < n!e < n!u_n + 1/n = n!v_n$, et raisonner par l'absurde. $\sin(2\pi n!e)$: Utiliser l'encadrement ci-dessus pour se ramener à l'étude de $\sin(2\pi/n)$. $\square$

Exercice 6
Existe-t-il une suite réelle (u_n) telle que u_n diverge mais telle que pour tout $k \geq 2$, la suite $(u_{nk})_n$ converge ?

Solution. Considérer la suite qui vaut 1 sur les nombres premiers et 0 ailleurs. $\square$

Exercice 7

1. Montrer qu'une suite bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence converge.
2. Soit u_n bornée, telle que $\lim_{+\infty}(u_n + \frac{u_{2n}}{2}) = 1$. Étudier u_n.

Solution.

1. Soit (u_n) bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence a. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Considérons $A_\varepsilon = \{n \mid |u_n - a| > \varepsilon\}$. Si A_ε est fini, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - a| \leq \varepsilon$, et la formule de la convergence vers a est vérifiée. Sinon $(u_n)_{n \in A_\varepsilon}$ est une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ de u_n, qui est une suite bornée. Donc (Bolzano-Weierstrass) on peut en extraire une sous-suite $u_{\varphi\circ\psi(n)}$ qui converge vers b. Or $|b-a| \geq \varepsilon > 0$ par construction, et b est une valeur d'adhérence de (u_n), il y a une contradiction.
2. Soit (u_n) bornée, telle que $\lim_{+\infty}(u_n + \frac{u_{2n}}{2}) = 1$. Si cette suite converge, sa limite vérifiera $\ell + \ell/2 = 1$, donc $\ell = 2/3$. Montrons que cette suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence, $2/3$.
   Par Bolzano-Weierstrass il existe une valeur d'adhérence. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une sous-suite qui converge vers une valeur d'adhérence x_0. La limite de $(u_{2\varphi(n)})$ (et par récurrence celle de $(u_{2^p\varphi(n)})$) existe, notons là x_1 (resp. x_p). Ces limites vérifient la relation de récurrence $x_{p+1} = 2(1 - x_p)$. On homogénéise en posant $v_p = x_p - 2/3$, et on obtient $v_p = (-2)^p v_0$ qui n'est borné que si $v_0 = 0$. C'est-à-dire si $x_0 = 2/3$. La suite a donc une seule valeur d'adhérence, on peut conclure par le 1.

$\square$

Exercice 8
Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective telle que $\frac{\varphi(n)}{n}$ converge. Calculer $\lim \frac{\varphi(n)}{n}$.

Solution. $\square$

Exercice 9
Soit (a_n) une suite réelle telle que $a_n \to +\infty$ et $(a_{n+1} - a_n) \to 0$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(a_{\varphi(n)} - a_n) \to 0$.

Solution. On pose n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ |a_n - a_{n+1}| < 1/3$ et $p = E(a_{n_0})$.

Hypothèse de récurrence : $A_k = \{n \mid n \geq n_{k-1}, a_n \geq p + k\} \neq \emptyset$ où $n_k = \inf A_k$. vérifie $p + k \leq a_{n_k} \leq p + k + 1/3$ et $n_k > n_{k-1} + 1$. $\square$

Exercice 10
Montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable, par l'absurde.

Solution. On pose $\{u_n | n \in \mathbb{N}\} = [0, 1]$. Soit $x_0 = 0$;

- x_1 le premier nombre $u_{n_1} > x_0$ dans la suite (u_n)
- x_2 le premier nombre $u_{n_2} < x_1$ et $> x_0$ dans la suite (u_n), avec $n_2 > n_1$,
- x_3 le premier nombre $u_{n_3} < x_1$ et $> x_2$ dans la suite (u_n), avec $n_3 > n_2$,
- ...

La suite (x_{2n}) est croissante, la suite (x_{2n+1}) est décroissante, $\square$

3 Gros

Exercice 11 (Cesàro)
Soit u_n une suite réelle, on pose $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. On suppose que u_n converge vers un réel ℓ, montrer que v_n converge aussi vers ℓ. Cas où ℓ est infini.
2. Montrer que, si v_n converge vers un réel ℓ et si u_n est croissante, alors u_n converge vers ℓ.
3. Est-ce toujours le cas si on omet l'hypothèse de croissance ? Si on rajoute seulement une hypothèse de positivité ?

Solution.

1. On se ramène au cas $\ell = 0$, puis on fait converger le début de la somme avec le $1/n$ et la fin grâce à la convergence de u_n. Dans le cas où ℓ est infini, même découpage de la somme. Il faut minorer le début de la somme, $\frac{1}{n}\left(-NA + \sum_{k=1}^{N} u_k\right)$, par exemple par -1.
2. On peut supposer $\ell = 0$. Par l'absurde, on montre que u_n est majoré, donc convergente (croissante majorée). On applique Cesàro pour prouver que la limite est bien 0.
3. Dans le cas général, $u_n = (-1)^n$ est un contre exemple. Dans le cas positif, on peut prendre $u_n = 1 + (-1)^n$ sur le même modèle.

$\square$

Exercice 12
Soit (u_n) une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $\lim u_n = 0$ et que $\sum n(u_n - u_{n+1}) = \sum u_n$.
2. Calculer $S_p = \sum \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)}$.

Exercice 13 (suites sous-additives)
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs tels que $a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall n, m$.
Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n} a_n\right)$ converge et que sa limite est $\inf \left\{ \frac{1}{p} a_p \mid p \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 14 (sous-groupes de $\mathbb{R}$)

1. Quels sont les sous-groupes discrets de $(\mathbb{R}, +)$?
2. Montrer que, si p est un entier qui n'est pas un carré, la suite $n\sqrt{p}$ modulo 1 est dense dans $[0; 1]$.

Solution.

1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$. Soit $a = \inf\{x \in G \mid x > 0\}$. Si G est discret, $a > 0$. Montrons que $G = a\mathbb{Z}$ par double inclusion. Pour tout $x \in G$, $x - E(\frac{x}{a})a$ est un élément de G et appartient à l'intervalle $[0; a[$. Par définition de a, $G \cap [0; a[= \{0\}$ donc $x = E(\frac{x}{a})a \in a\mathbb{Z}$. De plus $a \in G$ groupe, donc $a\mathbb{Z} \subset G$. D'où l'égalité $G = a\mathbb{Z}$.
   Réciproquement, tout sous-groupe de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$ est discret.
2. Soit $G =< 1, \sqrt{p} >$. La suite considérée est exactement $G \cap [0, 1[$. Par l'absurde, si le sous-groupe G était discret, il existerait un nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $1 = an_1$ et $\sqrt{p} = an_2$ avec n_1 et n_2 deux entiers. La première égalité entraîne que a est de la forme $1/n$, et par conséquent la seconde entraîne que $\sqrt{p}$ est un rationnel. D'où une contradiction.

$\square$

Exercice 15 (théorème de Beatty)
Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$. On considère la suite $d_n(A) = \frac{\text{Card}(A \cap \{1,\dots,n\})}{n}$. On définit la densité de A, notée $d(A)$, comme la limite de cette suite si elle existe.

1. Toutes les parties de $\mathbb{N}^*$ ont-elles une densité ?
2. Montrer que, si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ ayant une densité, alors $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$.
3. Soit $a > 1$, quelle est la densité de $E_a = \{E(na) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
4. En déduite que si E_a et E_b forment une partition de N^*, a et b sont irrationnels et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Solution.

1. Non. la suite $(d_n(A))$ est bornée car comprise entre 0 et 1, par conséquent il faut chercher une partie A telle que $(d_n(A))$ ait plusieurs valeurs d'adhérence.
2. $\text{Card}((A \cup B) \cap \{1, \dots, n + 1\}) = \text{Card}(A \cap \{1, \dots, n + 1\}) + \text{Card}(B \cap \{1, \dots, n + 1\})$ puisque A et B sont disjointes. Par conséquent, en divisant par n et en passant à la limite, $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$.

$\square$

Exercice 16

1. Montrer que si suite u_n vérifie $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.
2. Montrer que la suite $\sin(\ln n)$ est dense dans $[-1; 1]$.
3. Qu'en est-il de la suite $n^{1/3} \cos(\pi\sqrt{n})$?

Solution.

1. Utiliser le fait que sin est contractante.

$\square$