Lycée Louis le grand — Année scolaire 2007/2008
Mathématiques Supérieure MPSI

Semaine 5
21 octobre 2007

[tracer les courbes avec gnuplot]

1 Petits

1.1 Courbes paramétrées et polaires

Exercice 1
Étudier la courbe paramétrée définie par $x(t) = e^{-1/t^2}$ et $y(t) = e^{-1/t^4}$ (avec le prolongement naturel en 0) et en particulier ses tangentes.

Solution. Par parité, on se restreint à $[0; +\infty[$. x et y croissent de 0 à 1. $y/x \to 0$ en 0 et $(1-y)/(1-x) \to 0$ en $+\infty$. □

Exercice 2
Tracer la courbe paramétrée définie par $x(t) = t(1 + \cos t)$ et $y(t) = t \sin t$.

Solution. Poser $\theta = t/2$ et obtenir l'équation polaire $\rho = 4\theta \cos\theta$. □

Exercice 3
Tracer la courbe paramétrée définie par $\rho(t) = 1 + t^2$ et $\theta(t) = \cos t$.

Solution. Tracer. □

Exercice 4
Trouver les courbes $\mathcal{C}^1$ telles que la tangente en M fasse un angle de $\pi/4$ avec $\overrightarrow{OM}$ en tout point M de la courbe.

Solution. Se placer en polaire, trouver une équa. diff. que vérifiée par ρ. On trouve $\rho = \lambda e^{\theta}$. □

Exercice 5
Tracer la courbe $\rho = \dfrac{\theta}{\theta - \frac{\pi}{4}}$.

Solution. La droite $\theta = \frac{\pi}{4}$ est asymptote. Le cercle $\rho = 1$ est asymptote (calculer aussi son intersection avec $\mathcal{C}$).
L'équation aux points double est $\theta^2 + \left((2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}(2k+1)\pi = 0$.
Changements de concavité suivant le signe de $\rho + \left(\frac{1}{\rho}\right)''$. □

Exercice 6
Étudier la courbe paramétrée définie par $x(t) = \frac{t+1}{t(t-1)}$ et $y(t) = \frac{t(t+1)}{t-1}$. Expliciter $x(1/t)$ et $y(1/t)$.

Solution.
□

Exercice 7

Solution.
□

1.2 Coniques

Exercice 8
Soit A un point d'une ellipse de foyers F et F'. Montrer que la tangente en A à l'ellipse est la bissectrice extérieure de AF et AF'.

Solution. Trop géométrique. □

Exercice 9
Soit A un point d'une ellipse dont F est un des foyers, et P la projection orthogonale de F sur la tangente à l'ellipse en A. Déterminer l'équation du lieu des points P lorsque A parcourt l'ellipse.

Solution. Équation de la tangente à l'ellipse en $A(x, y)$: $\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1$. Après calculs, l'équation cherchée est $X^2 + Y^2 = a^2$. □

Exercice 10
Déterminer l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole.

Solution.

□

Exercice 11
Soit une parabole P de foyer F, de directrice D. Soit M est un point de P qui se projette en M' sur D. Montrer que la tangente en M à la parabole est la médiatrice de FM'.

Solution. Prendre des coordonnées *adaptées* et faire le calcul... □

2 Gros

Exercice 12
Paramétrer et étudier la courbe elliptique suivante : $y^2 = x^3 - 5x^2 + 3$.

Solution. faire l'exo... □

Exercice 13
Rectangles d'aire maximale et minimale circonscrits à une ellipse. Lieu des sommets des rectangles circonscrits à une ellipse

Solution. Prendre des coordonnées polaires. max : $\theta = 0\ [\pi/2]$. min : $\theta = \pi/4\ [\pi/2]$. lieu : cercle de Monge □

3 Impairs

Exercice 14
Soit une famille de droites $D(t)$ du plan affine, d'équations $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, où a, b et c sont de classe $\mathcal{C}^2$ au moins sur un intervalle I. On suppose que $a^2 + b^2 \neq 0$ et $ab' - ba' \neq 0$, montrer qu'il existe un et un seul arc paramétré $\Gamma = (I, f)$, de classe $\mathcal{C}^1$, tel que pour tout t de I, $m(t) \in D(t)$ et Γ a pour tangente au point $m(t)$ la droite $D(t)$ (si $m(t)$ n'est pas stationnaire sur Γ).

Solution. Soit $(x(t), y(t))$ les coordonnées de $m(t)$. Traduisons les deux conditions :

$$a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \quad (1)$$
$$a(t)x'(t) + b(t)y'(t) = 0 \quad (2)$$

La deuxième condition traduit l'orthogonalité de $a(t)\overrightarrow{i} + b(t)\overrightarrow{j}$, vecteur normal à $D(t)$, et de $Om'(t)$, à condition que ce vecteur soit non nul.

On dérive l'équation (1), puis l'on lui soustrait l'équation (2). On se retrouve avec le système équivalent suivant

$$\begin{aligned} a(t)x(t) + b(t)y(t) &= -c(t) \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) &= -c'(t) \end{aligned}$$

qui a une solution lorsque $ab' - ba' \neq 0$. □

Exercice 15

(Cet exercice fait suite au précédent : il faut connaître les enveloppes de droite).

Calculer l'enveloppe des droites sur lesquelles deux cercles donnés découpent des segments de même longueur. *Indications :*

1. Notons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les deux cercles de centres et rayons respectif A, R et A', R'. Se placer en coordonnées polaires, de centre O milieu du segment $[AA']$, et d'axe des x la droite (AA').
2. Calculer les distances $d(A, D_\theta)$ et $d(A', D_\theta)$, où D_θ a pour équation cartésienne $x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0$.
3. Écrire la condition pour que D_θ produise des cordes sur les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Calculer la taille des segments.
4. Montrer que $x = \frac{R'^2-R^2}{4a}(1-\tan^2\theta)$ et que $y = \frac{R'^2-R^2}{4a}(2\tan\theta)$, où a est l'abscisse de A.

Solution.

1. On peut remarquer que $A \neq A'$ si $R \neq R'$.
2. $d(A, D_\theta) = |a\cos\theta - p(\theta)|$ et $d(A', D_\theta) = |a\cos\theta + p(\theta)|$.
3. D_θ coupe $\mathcal{C}$ en deux points si et seulement si $d(A, D_\theta) < R$. Si $[MN]$ est la corde associée à D_θ, on utilise Pythagore : $\frac{MN^2}{4} + d^2 = R^2$.
4. L'égalité cherchée est donc $R^2 - d(A, D_\theta)^2 = R'^2 - d(A', D_\theta)^2$. On en déduit $p(\theta) = \frac{R'^2-R^2}{4a\cos\theta}$ pour $\theta \neq \pi/2\ [\pi]$. Puis on utilise le résultat de l'exercice précédent, toujours pour $\theta \neq \pi/2\ [\pi]$:

$$\begin{aligned} x\cos(\theta) + y\sin(\theta) &= \frac{R'^2 - R^2}{4a\cos\theta} \\ -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) &= \frac{(R'^2 - R^2)\sin\theta}{4a\cos^2\theta} \end{aligned}$$

   On obtient donc un arc de parabole.

□

Exercice 16

Enveloppe des droites coupant un rectangle $ABCD$ en deux régions d'aires respective kS et $(1-k)S$, avec $k \in]0;1[$ fixé et S l'aire du rectangle.