Lycée Louis le grand — Année scolaire 2008/2009
Mathématiques Supérieure MPSI

Semaine 4
15 octobre 2009

1 Programme de Colles : Géométrie élémentaire.

1.1 Géométrie élémentaire dans le plan.

Modes de repérage. Changement de base. Produit scalaire, bilinéarité, symétrie. Produit mixte (déterminant), propriétés. Droites, cercles. Ensembles des points M du plan tels que :

- $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$;
- $MB = kMA$;
- $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \alpha[\pi]$

1.2 Géométrie élémentaire dans l'espace.

Modes de repérage. Produit scalaire. Produit vectoriel. Déterminant. Droites, plans, sphères, cercles. Intersections et distances dans les différents cas.

2 Petits

Exercice 1
On considère les points $A(2,1), B(5,-2), C(3,4)$.

1. Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.
2. Donner une équation cartésienne de la droite (BC).
3. Calculer la distance d du point A à la droite (BC).
4. Calculer la longueur du segment $[BC]$. En déduire l'aire S du triangle ABC.
5. Calculer $\sin\hat{A}, \sin\hat{B}$.

Solution.

1. Calculer un det 3x3 (HP).
2. calculer un det 3x3 (le même).
3. $d = |ax_0 + bx_0 + x|/\sqrt{a^2+b^2}$.
4. $2\sqrt{10}$. $S = 6$.
5. $2S = bc\sin\hat{A}$.

□

Exercice 2
Soient a, b, c, d quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Démontrer les formules suivantes :

1. $(a \wedge b).(c \wedge d) = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$
2. $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = [a,c,d]b - [b,c,d]a = [a,b,d]c - [a,b,c]d$
3. $[a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a] = [a,b,c]^2$

Solution.

1. $(a \wedge b).(c \wedge d) = ((c \wedge d) \wedge a).b = ((a.c)d - (a.d)c).b = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$

□

Exercice 3
Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires. Soient I, J, K, L Les milieux respectifs de (A, B), (C, D), (B, C) et (A, D).

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{LK}$.
2. Démontrer que, étant donné un point P de $[K, L]$, $\exists! M \in [A, B]$ $\exists! M' \in [C, D]$ tels que P soit le milieu de $[MM']$.

Exercice 4
Calculer le centre de $\mathscr{O}_2$ et de $\mathscr{O}_3$.

Solution. Regarder la conjugaison d'une symétrie par un élément du centre. Les éléments du centre laissent stable les droites, donc sont des homothéties. □

Exercice 5 (pavage du plan)
Quels sont les polygones réguliers qui permettent de paver le plan ?

Solution. Définir les polygones réguliers (cotés de même longueurs et angles égaux). Quel est l'angle entre deux cotés d'un n-gone ? (ou au moins le minorer). Quel relation nécessaire doit vérifier cet angle pour que le polygone puisse paver le plan ? □

Exercice 6
On note $\mathscr{O}_2$ l'ensemble des isométries vectorielles du plan. Il est constitué des rotations et des symétries par rapport à une droite.

1. Soit r_θ et s_D une rotation et une symétrie fixées. Décrire $r \circ s \circ r^{-1}$. En déduire qu'il suffit d'une symétrie et de l'ensemble des rotations pour engendrer $\mathscr{O}_2$.
2. (Montrer que le sous-groupe engendré par la rotation d'angle $\pi/4$ est fini.) Décrire les sous-groupes finis de $\mathscr{O}_2$.
3. Décrire ces sous-groupes comme l'ensemble des isométries laissant invariant des figures géométriques simples.

Exercice 7
Soit r la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé et orienté par un vecteur unitaire e et d'angle θ.

1. Montrer que $r(x) = x + (\sin\theta)\ e \wedge x + (1 - \cos\theta)\ e \wedge (e \wedge x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.
2. On suppose que r n'est pas une symétrie, et l'on note $t = \tan\frac{\theta}{2}$ et $e' = te$. Montrer que

$$r(x) = x + \frac{2}{1 + \|e'\|^2}\ e' \wedge (x + e' \wedge x)$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. (formule de Rodrigues, exercice tiré du polycopié d'algèbre d'O. Debarre).

Exercice 8
Soit $ABCD$ un parallélogramme, et M un point sur la diagonale (BD). Soit I le symétrique de C par rapport à M. Soit E la projection de I sur (AB) parallèlement à (AD), F la projection de I sur (AD) parallèlement à (AB).
Montrer que E, M et F sont alignés.

Solution. Faire un dessin. □

Exercice 9 (Théorème de Ménélaüs)
Soit ABC un triangle. Soit P un point de la droite (BC), Q un point de la droite (CA) et R un point de la droite (AB), P, Q, R étant distincts de A, B, C.
Montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

Solution. Se placer dans un repère. □

3 Gros

Exercice 10
Soit G un sous-groupe fini du groupe des isométries du plan. Prouver que G admet au moins un point fixe. (i.e. il y a un point du plan fixe pour tous les éléments de G).

Moyenne.

Exercice 11
Montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans lui même, non nulle, et qui conserve le produit vectoriel, est une rotation.

Le plus difficile est de montrer que f est linéaire.

Exercice 12
1. Quelles sont les parties convexes du plan dont le complémentaire est aussi convexe ?
2. Même question dans $\mathbb{R}^n$.

Attention : convexité, pas encore vue. Faire un dessin.

Exercice 13 (Polyèdres)
Un polyèdre convexe est une partie de l'espace bornée limitée par des inéquations linéaires $a_k x + b_k y + c_k z \leq d_k$. Il est dit régulier s'il est composé de p faces régulières (i.e. des polygones réguliers), ayant chacune q cotés.
1. Quels sont les polyèdres réguliers de $\mathbb{R}^3$? (*indication :* regarder l'angle solide au sommet, qui donne une condition sur p et q, puis étudier les cas).
2. Montrer que $pN_2 = 2N_1 = qN_0$, où N_0 est le nombre de sommets, etc...
3. Calculer les groupes de symétries préservant l'orientation (i.e. de rotations) de chacun de ces solides.

Exercice 14 (plan projectif)
à faire. (définir la relation d'équivalence, plus quelques propriétés).
1.

4 Impairs

Exercice 15
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points du plan tels que, si on en prends 2, il y en a un troisième sur la même droite. Montrer qu'ils sont tous alignés.

Considérer le triangle ABC qui a la plus petite hauteur.

Exercice 16
Soit A, B, C des parties de $\mathbb{C}$ disjointes telles que $A \cup B \cup C = \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe z, z' dans la même partie, avec $|z - z'| = 1$.

Raisonner par l'absurde : tracer un triangle équilatéral de coté 1, dont chacun des sommets est nécessairement dans une partie différente, en rajouter un deuxième (on obtient un losange) puis faire tourner la figure autour d'un des sommets aigus du losange.