Lycée Louis le grand
Mathématiques Supérieure MPSI

Année scolaire 2007/2008

Semaine 1
22 septembre 2008

1 Programme de Colles : Logique, Ensembles, Applications.

1.1 Logique

Éléments de logique. Propositions, connecteurs, tables de vérité, quantificateurs, calcul des prédicats (notamment négation d'une proposition, raisonnement par l'absurde, contraposée etc ...)

1.2 Ensembles

Ensemble, inclusion, appartenance.
Opération sur les ensembles : union, intersection, différence, propriétés.
Partition d'un ensemble.

1.3 Applications

Produit cartésien
Applications : composition, restriction, prolongement, injection, surjection, bijection. Application réciproque.
Image directe et réciproque, parties stables, application induite.

1.4 Relations binaires

Relation binaire : relation d'équivalence, classe d'équivalence, ensemble quotient.
Relation d'ordre : ordre partiel, ordre total, majorant, minorant maximum, minimum, borne sup, borne inf.
Application croissante.

2 Petits

Exercice 1
Soit $A, B \subset E$. Montrer que

1. $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$.
2. $A \subset B \Longleftrightarrow \mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$

Solution. □

Exercice 2
Nier la formule définissant la continuité d'une fonction en un point.

Solution. □

Exercice 3
Soit E un ensemble, montrer que $\mathscr{P}(E) \simeq \mathscr{F}(E, \{0, 1\})$

Solution. □

Exercice 4
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que $g \circ f$ surjective entraîne g surjective, et que $g \circ f$ injective entraîne f injective.

Solution. $\square$

Exercice 5
Soit $A, B, C \subset E$. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$

Solution. $\square$

Exercice 6
Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable $x \in E$. On note $\overline{P} = \{x \in E \mid P(x)\}$. Déterminer, en fonction de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$, les ensembles $\overline{\neq P}$, $\overline{P \wedge Q}$, $\overline{P \vee Q}$, $\overline{P \Longrightarrow Q}$ et $\overline{P \iff Q}$.

Solution. $\square$

3 Gros

Exercice 7
Soit $I \neq \emptyset$, $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux famille de parties d'un ensemble E. Montrer que

$$\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in\mathscr{P}(I)} \left(\left(\bigcup_{i\in X} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in X} B_i\right)\right)$$

Solution. Procéder (calmement) par double inclusion. $\square$

Exercice 8
Soit E, F deux ensembles. Montrer que

$$\exists f \in \mathscr{F}(E,F) \text{ injective } \iff \exists f \in \mathscr{F}(F,E) \text{ surjective}$$

Solution. $\square$

Exercice 9
On considère un nombre fini de personnes qui se serrent la main. On suppose que la relation « avoir serré la main de » n'est jamais réflexive et est symétrique. Montrer que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.

Solution. $\square$

Exercice 10
Soit E et F des ensembles, soit f un injection de E dans F et g une injection de F dans E. Montrer qu'il existe une bijection entre E et F.

Solution. $\square$

Exercice 11
Montrer que la seule fonction $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ qui vérifie $f(n+1) > f(f(n))$ pour tout n est l'identité.

Solution. Montrer par récurrence sur n que $f(m) \leq n \Longrightarrow m \leq n$. $\square$