Lycée Carnot Année scolaire 2009/2010
ECE 1

Semaine
13 octobre 2009

1 Programme de Colles

Fonctions usuelles

- Éléments de logique : quantificateurs, implications, contraposée.
- Domaines de définition de fonctions simples (faisant intervenir racines carrées et ln).
- Parité, périodicité.
- Variations de fonctions usuelles (aucune définition précise de la limite ou de la dérivée n'a été donnée, on se contente pour l'instant des connaissances de Terminale).
- Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque (variations et courbes).
- Fonctions puissances : rappels sur les puissances entières et généralisation aux puissances quelconques.
- Résultats de croissance comparée (admis).
- Valeur absolue (propriétés algébriques, résolution d'équations et inéquations ; courbe de la fonction valeur absolue et de fonctions plus complexes faisant intervenir des valeurs absolues).
- Partie entière (définition et courbe).

Sommes, produits, récurrences

- Symbole $\sum$, propriétés et règles de calcul (y compris les changements d'indice) ; exemple de calcul faisant intervenir des sommes télescopiques.
- Sommes doubles.
- Symbole $\prod$, régles de calcul ; définition des factorielles.
- Démonstration par récurrence, récurrence double et récurrence forte.
- **Calcul des sommes classiques suivantes :** $\sum_{i=0}^{i=n} i$; $\sum_{i=0}^{i=n} i^2$; $\sum_{i=0}^{i=n} i^3$; $\sum_{i=0}^{i=n} q^i$.

2 Petits

Exercice 1
Étudier les variations de $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$, pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Exercice 2
Soit $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ pour $x \in \mathscr{D}_f$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$. Déterminer $f^{(n)}$.

Solution. $a = -1$ et $b = 1$. □

Exercice 3
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{u_n+2}$

1. Montrer que $\forall n \geq 1$, $-1 < u_n < 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{1}{u_n+1}$. Montrer que (v_n) est bien définie et que c'est une suite arithmétique.
3. Déterminer (v_n) puis (u_n) en fonction de n.

Solution.

1. Rec.
2. Calcul sur les fractions ... !
3. immédiat.

□

Exercice 4
Dérivabilité de $x \mapsto \exp(-1/x^2)$ si $x > 0$, $\mapsto 0$ sinon, en $x = 0$.

Solution. Récurrence, dérivabilité, fonctions usuelles. □

Exercice 5
Soit (u_n) la suite de Fibonacci : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{2p+1} = u_p^2 + u_{p+1}^2$ et $u_{2p+2} = u_{p+1}(2u_p + u_{p+2})$.

Solution. Recs. □

3 Gros

Exercice 6
Soit (u_n) une suite. Montrer que (u_n) est arithmétique si et seulement si $\forall n \geq 1, u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$.

Solution. Commencer par le sens direct. Faire écrire ce que l'on sait et ce que l'on veut montrer. Tout va bien se passer. □