Cliquer sur pour avoir la source du document.
Cliquer sur les trombones dans l'intitulé de chaque exercice pour récupérer la source des exercices.

Exercice 1 (CCP 2016).
On considère dans ce problème la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0;1[$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. (a) *Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$*
   (b) *En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.*
   Justifier, alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie.
   (c) *Déduire de la question 1a que, pour tout $x \in [0;1], f(x) \in [0;1]$*
   (d) *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;1]$*
2. (a) *Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.*
   On détaillera les calculs effectués.
   Déterminer le tableau de variations de f sur $[0;1]$
   (b) *Montrer que, pour tout $x \in [0;1], f(x) \geqslant x$*
   (c) *Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0,1]$.*
   On se placera dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ et on utilisera l'échelle suivante : 10cm pour 1 unité.
   On ferra apparaître la tangente horizontale et la première bissectrice.
   Dans cette question uniquement on suppose $u_0 = \frac{1}{4}$; construire à l'aide du graphe précédent les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (d) *Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.*
3. (a) *Calculer $f(1)$*
   (b) *En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |1 - u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|1 - u_n|$.*
   (c) *En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.*
   (d) *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence et déterminer sa limite.*

Correction.

1. (a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1$.
   (b) *Un carré est toujours positif, ainsi :* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4} > 0$.
   $x \mapsto x^2 - x + 1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme, et est à valeurs strictement positives d'après ce qui précède.
   $X \mapsto \sqrt{X}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
   Par composition, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier,

   $$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

   Soit $\mathcal{P}_n$: "u_n est bien définie et $u_n \in \mathbb{R}$"
   Initialisation : $u_0 \in]0;1[$ par hypothèse, donc u_0 est bien défini : $\mathcal{P}_0$ est vrai.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathcal{P}_n$ vrai, et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
   $\mathcal{P}_n$ est vrai donc $u_n \in \mathbb{R}$ est bien défini.
   Comme f est définie sur $\mathbb{R}$, $f(u_n)$ est bien défini, à valeur réelle.
   Or $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $u_{n+1} \in \mathbb{R}$ est bien défini : $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai.
   Conclusion : On a montré par récurrence que :

   $$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini.}}$$

(c) $\forall x \in [0;1]$, $-\dfrac{1}{2} \leq x - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2}$, d'où $\forall x \in [0;1]$, $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$.

En ajoutant $\dfrac{3}{4}$, *on a donc :* $\forall x \in [0;1]$, $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \leq 1$.

Or, on a vu au 1.(b) que : $\forall x \in [0;1]$, $f(x) \geqslant 0$.

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in [0;1],\ f(x) \in [0;1]}$$

(d) *Soit* $\mathcal{P}_n$: "$u_n \in [0;1]$"

Initialisation : $u_0 \in]0;1[$ *par hypothèse, donc* $u_0 \in [0;1]$: $\mathcal{P}_0$ *est vrai.*

Hérédité : *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *fixé. Supposons* $\mathcal{P}_n$ *vrai, et montrons* $\mathcal{P}_{n+1}$.

$\mathcal{P}_n$ *est vrai donc* $u_n \in [0;1]$.

Comme $\forall x \in [0;1],\ f(x) \in [0;1]$, *en prenant* $x = u_n$, *on a* $f(u_n) \in [0;1]$.

Or $u_{n+1} = f(u_n)$, *donc* $u_{n+1} \in [0;1]$: $\mathcal{P}_{n+1}$ *est vrai.*

Conclusion : *On a montré par récurrence que :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;1]}$$

2. (a) *On a vu au 1.(b) que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *donc :*

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$$

De plus, en posant $u(x) = x^2 - x + 1$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $2\sqrt{x^2-x+1} \geqslant 0$ *car une racine est toujours positive.*

Donc, $f'(x)$ *est du signe de* $2x-1$.

Comme $2x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2}$, *on obtient le tableau de variation suivant :*

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1

Remarques : $f(0) = \sqrt{1} = 1$, $f(1) = \sqrt{1} = 1$ *et* $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\forall x \in [0;1]$,

$$\begin{aligned} f(x) - x = \sqrt{x^2-x+1} - x &= \frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x} \text{ en utilisant l'expression conjuguée.} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}. \end{aligned}$$

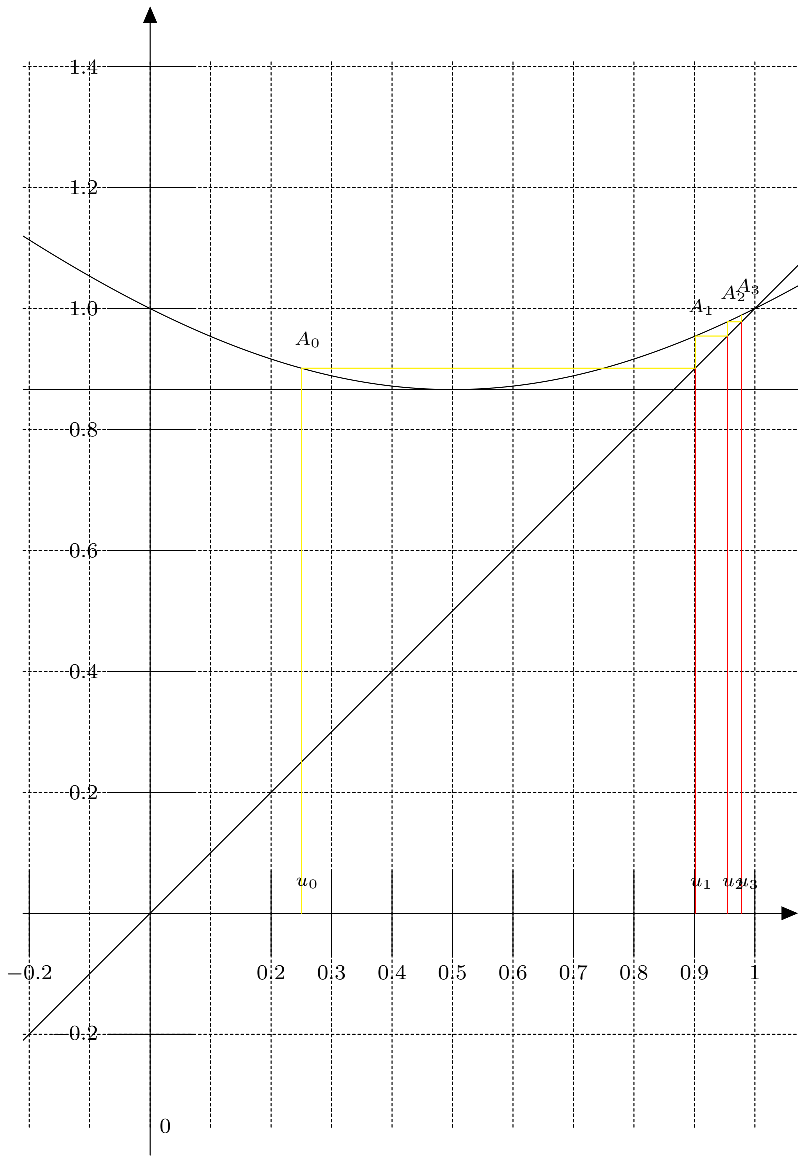
Comme $\forall x \in [0;1]$, $\sqrt{x^2-x+1} + x \geqslant \sqrt{x^2-x+1} > 0$

et $\forall x \in [0;1]$, $-1 \leq -x \leq 0$ *d'où* $1 - x \geqslant 0$.

Par produit, $\forall x \in [0;1]$, $f(x) - x \geqslant 0$, *c'est à dire :*

$$\boxed{\forall x \in [0;1],\ f(x) \geqslant x}$$

(c) *Remarques :* $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ *et* $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$



(d) $\forall\, x \in [0;1],\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x^2 - x + 1} \leq 1$ *d'après le tableau de variation de* f.

Par passage à l'inverse, $\forall\, x \in [0;1],\ 0 < \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **(1)**

De plus, $\forall\, x \in [0;1],\ 0 \leq 2x \leq 2$*, d'où* $-1 \leq 2x-1 \leq 1$*, et* $0 \leq |2x-1| \leq 1$ **(2)**

On en déduit par produit de **(1)** *et* **(2)** *:*

$$\boxed{\forall\, x \in [0;1],\ |f'(x)| = \frac{|2x-1|}{2\sqrt{x^2-x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

3. (a) $f(1) = \sqrt{1^2 - 1 + 1} = \sqrt{1} = 1$.

(b) f *est continue sur* $[0;1]$ *et dérivable sur* $]0;1[$*. De plus,* $\forall\, x \in [0;1],\ |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée entre 1 *et* u_n *qui sont dans* $[0;1]$*, on a :*

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |f(1) - f(u_n)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ |1 - u_n|$

soit encore :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ |1 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\ |1 - u_n|}$$

(c) *Soit* $\mathcal{P}_n$: "$|1-u_n| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|$"

<u>*Initialisation*</u> : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^0 |1-u_0| = |1-u_0|$, *donc* $\mathcal{P}_0$ *est vrai.*

<u>*Hérédité*</u> : *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *fixé. Supposons* $\mathcal{P}_n$ *vrai, et montrons* $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$\begin{aligned} |1-u_{n+1}| &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} |1-u_n| \text{ d'après la question 3.(b)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0| \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} |1-u_0| \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ *est vrai.*

<u>*Conclusion*</u> : *On a montré par récurrence que :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |1-u_n| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|}$$

(d) $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| < 1$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$.

D'après un corollaire du théorème des gendarmes, on a alors $\lim_{n\to+\infty} 1-u_n = 0$, *d'où* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge et a pour limite } 1}$$

Exercice 2 (CCP 2016).

Étude d'une intégrale

1. *Justifier que* $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ *converge et calculer sa valeur.*

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ *converge.*

   (a) *Soit* $A \in \mathbb{R}_+^*$. *Montrer que*
   $$\int_0^A t^{n+1}e^{-t}dt = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}dt.$$

   (b) *Déterminer (et justifier) la limite de* $A^{n+1}e^{-A}$ *quand* A *tend vers* $+\infty$.

   (c) *En déduire que* $I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}dt$ *converge et que* $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

3. *Montrer alors que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ *converge et vaut* $n!$.

   Étude d'un produit scalaire

   On rappelle que $\mathbb{R}_3[X]$ *désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3.*
   Pour tous P *et* Q *dans* $\mathbb{R}_3[X]$, *on pose :*
   $$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

4. *Justifier rapidement en utilisant 3 que, pour tout* P *et* Q *dans* $\mathbb{R}_3[X]$, *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ *converge.*

5. *Montrer que l'application* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X]\times\mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ (P,Q) & \longmapsto & \langle P,Q\rangle \end{array}$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_3[X]$.

   Construction d'une base orthogonale

   Soit Φ *l'application définie sur* $\mathbb{R}_3[X]$ *par :*
   $$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X).$$
   On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ *est la famille* $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$.

6. *Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.*
7. *Vérifier que la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
8. *Montrer alors que les valeurs propres de Φ sont $0, -1, -2, -3$.*
   L'endomorphisme est il diagonalisable ?
9. *Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, déterminer un vecteur propre P_k de ϕ associé à la valeur propre $-k$ et dont le coefficient dominant vaut 1.*
   On présentera et on expliquera les calculs effectués.
   On supposera dans la suite que P_3 désigne un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre -3 et de coefficient dominant égal à 1.
10. *Soient P et Q dans $\mathbb{R}_3[X]$.*
    (a) *On pose $f : t \longmapsto tP'(t)e^{-t}$.*
    Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.
    Pour tout $t \geqslant 0$, exprimer $f'(t)$ en fonction de $\Phi(P)(t)$ et de e^{-t}.
    (b) *Montrer que*
    $$\langle \Phi(P), Q \rangle = \int_0^{+\infty} f'(t)Q(t)dt.$$
    (c) *En effectuant une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f'(t)Q(t)dt$ avec $A \in \mathbb{R}$, montrer que*
    $$\langle \Phi(P), Q \rangle = -\int_0^{+\infty} tP't)Q'(t)e^{-t}dt.$$
    (d) *En déduire que $\langle \Phi(P), Q \rangle = \langle P, \Phi(Q) \rangle$.*
11. *On rappelle que pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, P_i est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-i$.*
    Soient i et j dans $\{0; 1; 2; 3\}$ tels que $i \neq j$.
    En remarquant que $\langle \Phi(P_i), P_j \rangle = \langle P_i, \Phi(P_j) \rangle$, montrer que $(i-j)\langle P_i, P_j \rangle = 0$ puis que P_i et P_j sont orthogonaux.
12. *En déduire que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux.*

Correction. 1. *$t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc I_0 est impropre en $+\infty$ On pose $I_x = \displaystyle\int_0^x e^{-t}dt$.*
$I_x = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}$ et par suite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I_x = 1$ donc l'intégrale I_0 converge vers 1.

2. (a) *On effectue ici une IPP.*
   $\begin{array}{ll} u(t) = t^{n+1} & u'(t) = (n+1)t^n \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{array}$ *u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, On obtient ainsi :*
   $$\begin{aligned} \int_0^A t^{n+1}e^{-t}dt &= \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^A + \int_0^A (n+1)t^n e^{-t}dt \\ &= -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}dt \end{aligned}$$
   (b) *Par le théorème de croissance comparée, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A^{n+1}e^{-A} = 0$.*
   (c) *De plus I_n est supposée convergente, on obtient bien par passage à la limite $A \to +\infty$:*
   $$I_{n+1} \text{ converge et } I_{n+1} = (n+1)I_n$$
3. *Il s'agit ici d'une preuve par récurrence où l'initialisation n'est rien d'autre que la question 1 et où l'hérédité s'obtient grâce à la question 2.*
   $\mathcal{P}(n)$« I_n converge vers $n!$ ».
   Initialisation : I_0 converge vers $1 = 0!$ d'après la question 1.
   Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour un n fixé. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
   D'après la question 2, $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)n!$ Par suite $I_{n+1} = (n+1)!$ on obtient bien l'hérédité.
   Nous avons donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge vers $n!$.

4. *PQ est un polynôme de degré au maximum 6. par linéarité de l'intégrale nous pouvons séparer* $\langle P,Q\rangle$ *en au plus 7 intégrales de la forme* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ *qui sont chacune convergente d'après la question 3.*
5. *L'application est tout d'abord bien définie d'après la question précédente. Montrons qu'elle est linéaire à gauche, symétrique (ce qui montrera la bilinéarité) définie et positive.*
   — *Linéaire à gauche :*
   Soit $(P_1, P_2, Q, \lambda) \in \mathbb{R}_3[X]^3 \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle &= \int_0^{+\infty} (\lambda P_1 + P_2)(t)Q(t)e^{-t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda P_1(t)Q(t)e^{-t} + P_2(t)Q(t)e^{-t}dt \\ &= \lambda\langle P_1, Q\rangle + \langle P_2, Q\rangle.\end{aligned}$$

   — *Symétrique :*
   Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$,

$$\begin{aligned}\langle P,Q\rangle &= \int_0^{+\infty} (P)(t)Q(t)e^{-t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}dt \\ &= \langle Q,P\rangle.\end{aligned}$$

   Cette application est symétrique et linéaire à gauche donc bilinéaire.
   — *Positive :*
   Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\langle P,P\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2e^{-t}dt \geqslant 0$ *car intégrale de fonction positive.*
   — *définie :*
   Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$\begin{aligned}\langle P,P\rangle = 0 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} P(t)^2e^{-t}dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0+\infty[P(t)^2e^{-t} = 0. \\ &\Rightarrow \forall t \in [0+\infty[P(t) = 0 \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ car } P \text{ a une infinité de racines.}\end{aligned}$$

   Ainsi cette application définie bien un produit scalaire.
6. *Tout d'abord* $P \in \mathbb{R}_3[X]$ *donc* $XP''(X)$ *est de degré au plus 3 et* $(1-X)P'(X)$ *également donc* $\Phi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
   De plus Soit $(P,Q,\lambda) \in \mathbb{R}_3[X]^2 \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)''(X) + (1-X)(\lambda P + Q)'(X) \\ &= \lambda XP''(X) + \lambda(1-X)P'(X) + XQ''(X) + (1-X)Q'(X) \\ &= \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)\end{aligned}$$

   Φ *est donc linéaire et à image dans* $\mathbb{R}_3[X]$ *c'est donc un endomorphisme.*
7. $\Phi(1) = 0$
   $\Phi(X) = 1 - X$
   $\Phi(X^2) = 2X + (1-X)2X = -2x^2 + 4X$
   $\Phi(X^3) = 6X^2 + (1-X)3X^2 = -3X^3 + 9X^2$. *On obtient ainsi la matrice de* Φ *dans la base canonique.*
8. *La matrice de* Φ *est triangulaire supérieure son polynôme caractéristique est donc* $(X-0)(X+1)(X+2)(X+3)$ *scindé à racines simples et donc* Φ *possède quatre valeurs propres distinctes qui sont* $0, -1, -2$ *et -3. Cet endomorphisme est donc diagonalisable.*
9. *Valeur propre* 0 *(*$k = 0$*)*
   On a vu que $\Phi(1) = 0$ *donc* 1 *est un vecteur propre pour la valeur propre 0. On pose donc* $P_0 = 1$.
   Valeur propre -1 ou -2.

Considérons un polynôme ayant pour matrice colonne dans la base canonique $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

$\Phi(P) = \lambda P$ *se traduit matriciellement par*

$$\begin{pmatrix} b \\ -b+4c \\ -2c+9d \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix}$$

Valeur propre -1 (k=1) on obtient $\begin{cases} b = -a \\ -b+4c = -b \\ -2c+9d = -c \\ -3d = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 0 = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \quad P_1 = X - 1$

Valeur propre -2 (k=2) on obtient $\begin{cases} b = -2a \\ -b+4c = -2b \\ -2c+9d = -2c \\ -3d = -2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = -4c \\ c = c \\ d = 0 \end{cases} \quad P_2 = X^2 - 4X + 2.$

10. (a) f *est un produit de fonction de classe* $\mathcal{C}^{+\infty}$ *sur* $\mathbb{R}$ *donc* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0; +\infty[$
$f'(t) = (P'(t) + tP''(t))e^{-t} - tP'(t)e^{-t} = e^{-t}((1-t)P'(t) + tP''(t)) = e^{-t}\Phi(P)(t)$.

(b)

$$\begin{aligned} \langle \Phi(P), Q \rangle &= \int_0^{+\infty} \Phi(P)(t)Q(t)e^{-t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} f'(t)Q(t)dt \end{aligned}$$

(c) *Dans cette question en invoquant les mêmes arguments que lors de la question 4, on constate qu'il n'y a aucun problème de convergence. On effectue ici une IPP.*
$\begin{matrix} u(t) = Q(t) & u'(t) = Q'(t) \\ v'(t) = f'(t) & v(t) = f(t) \end{matrix}$ *On obtient ainsi :*

$$\begin{aligned} \int_0^A f'(t)Q(t)dt &= [Q(t)f(t)]_0^A - \int_0^A Q'(t)f(t)dt \\ &= Q(A)f(A) - Q(0)f(0) - \int_0^A Q'(t)f(t)dt \\ &= Q(A)f(A) - \int_0^A tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt \end{aligned}$$

Enfin par croissance comparée $\lim\limits_{A\to+\infty} Q(A)f(A) = 0$.
On obtient bien

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$$

(d) *En échangeant les rôles de* P *et* Q, *on obtient* $< \phi(Q), P >= -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}dt$. *Par symétrie du produit scalaire on obtient l'égalité voulue.*

11. *soit* i *et* j *deux entiers distincts de* $\{0, 1, 2, 3\}$ *On constate que* $\langle \Phi(P_i), P_j \rangle = \langle -iP_i, P_j \rangle$ *et* $\langle P_i, \Phi(P_j) \rangle = \langle P_i, -jP_j \rangle$. *En partant de*

$$\langle \Phi(P_i), P_j \rangle = \langle P_i, \Phi(P_j) \rangle$$

on obtient l'égalité

$$-i\langle P_i, P_j \rangle = -j\langle P_i, P_j \rangle$$

C'est à dire

$$(i-j)\langle P_i, P_j \rangle = 0$$

Or i *et* j *étant distinct on obtient* $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ *et donc que* P_i *et* P_j *sont orthogonaux.*

12. *La famille est constitué de 4 vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension 4. C'est donc une base. De plus les éléments de cette famille sont deux à deux orthogonaux. On a donc bien la base recherchée.*

Exercice 3 (CCP 2016). ***Rappel des notations***
On rappelle que, pour X une variable aléatoire, $E(X)$ désigne l'espérance de X et $V(X)$ désigne la variance de X.
Étant donnés deux événements A et B la notation $P_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.
Contexte
On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants $0, 1, 2, 3, \ldots$
Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre. À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soir dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérées ici.
À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoules allumée a la probabilité $\dfrac{1}{2}$ de rester allumée et $\dfrac{1}{2}$ de griller.
On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarquera que X_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2, c'est à dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le vecteur colonne U_n dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Mise en place du problème

1. *Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $E(X_0) = 2$.*
   Déterminer la variance de X_0.
2. *Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :*
$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}, P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$
3. *Déterminer pour tout entier naturel n et sans justification les probabilités conditionnelles :*
$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0),$$
$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0)$$
4. *Soit $n \geqslant 0$. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.*
   Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

   Espérance et variance des X_n
   On se propose de déterminer l'espérance et la variance de tous les X_n sans chercher leur loi.
   On introduit les matrices de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$
$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
5. *Calcul de l'espérance*
   (a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $E(X_n) = L_1 U_n$*
   (b) *Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1.*
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = \dfrac{1}{2} E(X_n)$.
   (c) *Exprimer alors $E(X_n)$ en fonction de n.*
6. *Calcul du moment d'ordre 2.*
   On rappelle la formule de transfert : pour une variable aléatoire finie X et une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
$$E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k) P(X = k).$$

(a) *En appliquant cette formule de transfert, exprimer, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $E(X_n^2)$ *en fonction de* L_2 *et* U_n.

(b) *Calculer* $L_2 A$ *et montrer qu'il existe deux réels* α *et* β *que l'on déterminera, tels que :*

$$L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2.$$

(c) *En déduire que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4}E(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
On pourra utiliser les résultats de la question 5.

(d) *On introduit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfait la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

(e) *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = E(X_n^2) - u_n$.
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique et déterminer sa raison.*

(f) *En déduire, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *l'expression de* $E(X_n^2)$ *en fonction de* n.

7. *Déterminer alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *l'expression de* $V(X_n)$ *en fonction de* n.

Correction. 1. *A l'instant initial, les deux ampoules sont allumées, donc* $X_0 = 2$: X_0 *est une v.a.r. constante vérifiant* $X_0(\Omega) = \{2\}$ *et* $p(X_0 = 2) = 1$.
On en déduit $E(X_0) = 2 \times 1 = 2$.
Comme X_0 *est une v.a.r. constante,* $V(X_0) = 0$.
Autre méthode : $E(X_0^2) = 2^2 \times 1 = 4$, *d'où* $V(X_0) = E(X_0^2) - (E(X_0))^2 = 4 - 2^2 = 0$.

2. *On sait que* $X_n = 2$ *: les deux ampoules sont allumées.*
$[X_{n+1} = 2]$ *si et seulement si chacune des deux ampoules reste allumée. Or la probabilité qu'une ampoule reste allumée est* $\frac{1}{2}$. *Comme les ampoules sont indépendantes l'une de l'autre, on a :*

$$\boxed{p_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$$

$[X_{n+1} = 1]$ *si et seulement si :*
la première ampoule reste allumée et la deuxième ampoule grille ,
ou
la première ampoule grille et la deuxième ampoule reste allumée.
Comme les ampoules sont indépendantes l'une de l'autre, l'évènement "la première ampoule reste allumée (probabilité de $\frac{1}{2}$*) et la deuxième ampoule grille (probabilité de* $\frac{1}{2}$*)" a pour probabilité* $\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
De même, l'évènement "la première ampoule grille et la deuxième ampoule reste allumée" a pour probabilité $\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Ces deux évènements étant disjoints, on a

$$\boxed{p_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}$$

3. *Avec un raisonnement analogue, on a :*
$p_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$p_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = 0$
$p_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$
$p_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}$
$p_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) = 0$
$p_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = 0$
$p_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1$

4. $\{X_n=0, X_n=1, X_n=2\}$ *forme un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales :*

$$\begin{aligned} p(X_{n+1}=1) &= p_{X_n=0}(X_{n+1}=1).p(X_n=0)+p_{X_n=1}(X_{n+1}=1).p(X_n=1)+p_{X_n=2}(X_{n+1}=1).p(X_n=2) \\ &= 0+\frac{1}{2}\,p(X_n=1)+\frac{1}{2}\,p(X_n=2). \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{p(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}\,p(X_n=1)+\frac{1}{2}\,p(X_n=2)}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} p(X_{n+1}=0) &= p_{X_n=0}(X_{n+1}=0).p(X_n=0)+p_{X_n=1}(X_{n+1}=0).p(X_n=1)+p_{X_n=2}(X_{n+1}=0).p(X_n=2) \\ &= 1.p(X_n=0)+\frac{1}{2}\,p(X_n=1)+\frac{1}{4}\,p(X_n=2). \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} p(X_{n+1}=2) &= p_{X_n=0}(X_{n+1}=2).p(X_n=0)+p_{X_n=1}(X_{n+1}=2).p(X_n=1)+p_{X_n=2}(X_{n+1}=2).p(X_n=2) \\ &= 0+0+\frac{1}{4}\,p(X_n=2)=\frac{1}{4}\,p(X_n=2). \end{aligned}$$

On a alors $\forall\, n\in\mathbb{N},\ AU_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p(X_n=0) \\ p(X_n=1) \\ p(X_n=2) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} p(X_n=0)+\frac{1}{2}p(X_n=1)+\frac{1}{4}p(X_n=2) \\ \frac{1}{2}p(X_n=1)+\frac{1}{2}p(X_n=2) \\ \frac{1}{4}p(X_n=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(X_{n+1}=0) \\ p(X_{n+1}=1) \\ p(X_{n+1}=2) \end{pmatrix} \text{ Ainsi,}$$

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ AU_n=U_{n+1}}$$

5. a) *Pour tout n dans $\mathbb{N}$:*

$E(X_n)=0.p(X_n=0)+1.p(X_n=1)+2.p(X_n=2)$ *par définition de l'espérance.*

$$L_1U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p(X_n=0) \\ p(X_n=1) \\ p(X_n=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.p(X_n=0)+1.p(X_n=1)+2.p(X_n=2) \end{pmatrix}$$

(L_1U_n est une matrice 1×1), d'où

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ E(X_n)=L_1U_n}$$

b) $L_1A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

D'où

$$\boxed{L_1A=\frac{1}{2}L_1}$$

On en déduit $E(X_{n+1}) = L_1U_{n+1}$ *d'après III.5.a)*

$= L_1AU_n$ *d'après III.4.*

$= \frac{1}{2}L_1U_n = \frac{1}{2}E(X_n)$

c) *$(E(X_n))$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.*

D'après le cours, $\forall\, n\in\mathbb{N},\ E(X_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n E(X_0)=2.\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ E(X_n)=\frac{1}{2^{n-1}}}$$

6. a) *Pour tout n dans $\mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= \sum_{i=0}^{2} i^2.p(X_n=i) = 0^2.p(X_n=0)+1^2.p(X_n=1)+2^2.p(X_n=2) \\ &= p(X_n=1)+4.p(X_n=2) \end{aligned}$$

$$L_2U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p(X_n = 0) \\ p(X_n = 1) \\ p(X_n = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.p(X_n = 0) + 1.p(X_n = 1) + 4.p(X_n = 2) \end{pmatrix},\ d'où$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_n^2) = L_2U_n}$$

b) D'une part,

$$L_2A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

D'autre part, $\alpha L_1 + \beta L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \beta & 2\alpha + 4\beta \end{pmatrix}$

Ainsi, $\alpha L_1 + \beta L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{2} \\ 2\alpha + 4\beta = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (\ldots)\ \alpha = \beta = \frac{1}{4}$

En conclusion,

$$\boxed{L_1A = \frac{1}{4}\,L_1 + \frac{1}{4}\,L_2}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}^2) = L_2U_{n+1} = L_2AU_n = \left(\frac{1}{4}\,L_1 + \frac{1}{4}\,L_2\right)U_n = \frac{1}{4}\,L_1U_n + \frac{1}{4}\,L_2U_n$

$$= \frac{1}{4}E(X_n) + \frac{1}{4}E(X_n^2) = \frac{1}{2^2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}.E(X_n^2)\ \text{d'après III.5., c'est à dire :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4}\,E(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

d) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{4}\,u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = u_{n+1}\ :$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4}\,u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1}}$$

e) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = E(X_{n+1}^2) - u_{n+1} = \left[\frac{1}{4}E(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - \left[\frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \frac{1}{4}\left[E(X_n^2) - u_n\right] = \frac{1}{4}v_n$$

$$\boxed{(v_n)\ \text{est une suite géométrique de raison}\ \frac{1}{4}}$$

f) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Or $v_0 = E(X_0^2) - u_0 = 4 - \frac{1}{2^{-1}} = 4 - 2 = 2.$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$, *et :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_n^2) = v_n + u_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2^{n-1}}}$$

7. D'après la formule de Koenig-Huyghens :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2}.\frac{1}{4^{n-1}}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ V(X_n) = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2}.\frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$$