
Mathématiques B - Banque PT 2016 - UPS

Proposition de corrigé - Michaël Delafontaine

(merci à Marc-André Ameller et Joël Pipon pour la relecture et les graphes)

Coquilles, erreurs, suggestions : michael.delafontaine@free.fr

Préminaire

1. Le point $M(u, v)$ est régulier si et seulement si la famille $\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v) \right)$ est libre.

2. (a) Une matrice Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^t Q Q = Q^T Q = I_n$.

On peut alors écrire $Q \in O_n(\mathbb{R})$.

(b) Notons q cet endomorphisme de \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique.

Il y a alors 3 situations possibles :

i) Si $\det(Q) = \det(q) = 1$: alors q est une **rotation** autour de l'axe $\Delta = \text{Ker}(q - Id)$.

Cas particulier : $q = Id$ et $\text{Ker}(q - Id) = \mathbb{R}^3$.

ii) Si $\det(Q) = \det(q) = -1$ et si Q est symétrique alors q est une **réflexion** par rapport au plan $P = \text{Ker}(q - Id)$.

Cas particulier : $q = -Id$ et $\text{Ker}(q - Id) = \{0\}$.

iii) Si $\det(Q) = -1$ et si Q n'est pas symétrique alors q est la **composée** (commutative) d'une réflexion et d'une rotation d'axe orthogonal au plan de la réflexion.

N.B. On rappelle qu'une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (ici un plan car nous sommes en dimension 3).

Partie I : 2 surfaces

1. (a)
$$\begin{cases} z = (y - 2\sqrt{2}x)y \\ y = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} z = \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha x \\ y = \alpha \end{cases}$$

On obtient une **droite** (incluse dans le plan d'équation cartésienne $y = \alpha$).

On en déduit que S est une réunion de droites : S est une **surface réglée**.

(b)
$$\begin{cases} z = (y - 2\sqrt{2}x)y \\ x = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} z = y^2 - 2\sqrt{2}\beta y \\ x = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} z = (y - \sqrt{2}\beta)^2 - 2\beta^2 \\ x = \beta \end{cases}$$

On obtient une **parabole** (incluse dans le plan d'équation cartésienne $x = \beta$).

(c) i. $\Lambda_\gamma : \begin{cases} z = \gamma \\ \gamma = (y - 2\sqrt{2}x)y \end{cases}$

• Si $\gamma = 0$: alors Λ_0 est la **réunion des deux droites** de systèmes d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} z = 0 \\ y - 2\sqrt{2}x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

• Si $\gamma \neq 0$, on a $\Lambda_\gamma : \begin{cases} z = \gamma \\ y^2 - 2\sqrt{2}xy - \gamma = 0 \end{cases}$

On étudie cette **conique** incluse dans le plan d'EC $z = \gamma$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ la matrice symétrique associée. On a alors $\det(A) = -2$ et :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & X - 1 \end{vmatrix} = (X - 2)(X + 1).$$

Ainsi $\text{sp}(A) = \{-1, 2\}$ donc A est une **hyperbole** (éventuellement dégénérée).

D'après le **théorème spectral** A est diagonalisable et il existe $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet E_2(A) : \begin{cases} -\sqrt{2}y = 2x \\ -\sqrt{2}x + y = 2y \end{cases} \iff y = -\sqrt{2}x \text{ d'où } E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$\bullet E_{-1}(A) : \begin{cases} -\sqrt{2}y = -x \\ -\sqrt{2}x + y = -y \end{cases} \iff x = \sqrt{2}y \text{ d'où } E_{-1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j})$ et $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\vec{i} + \vec{j})$.

Alors dans le nouveau repère orthonormal $(0, \vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$:

$$\Lambda_\gamma : \begin{cases} z = \gamma \\ 2X^2 - Y^2 = \gamma \end{cases}$$

Pour $\gamma \neq 0$, on obtient bien une **hyperbole**.

Pour $\gamma = 0$, on obtient la **réunion de deux droites**, qui sont les **asymptotes** des hyperboles si on fait la confusion des sommets O_γ , c'est-à-dire, en considérant toutes ces courbes dans un même plan (XOY) .

Pour faire un tracé correct dans le repère $(O_\gamma, \vec{i}, \vec{j})$ et placer précisément les asymptotes et les sommets, on peut utiliser la formule de changement de repère entre les deux bases orthonormales (directes) du plan :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

• **Sommets** : pour $\gamma = -2$, les sommets ont pour coordonnées $(0, \sqrt{2})$ et $(0, -\sqrt{2})$ dans $(O_\gamma, \vec{I}, \vec{J})$ puis $\frac{1}{\sqrt{3}}(2, \sqrt{2})$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}(-2, -\sqrt{2})$ dans $(O_\gamma, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour $\gamma = 1$, les sommets ont pour coordonnées $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ dans $(O_\gamma, \vec{I}, \vec{J})$ puis $\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ dans $(O_\gamma, \vec{i}, \vec{j})$.

• **Asymptotes** : elles ont pour équations cartésiennes $Y = \pm\sqrt{2}X$ dans $(O_\gamma, \vec{I}, \vec{J})$ puis $y = 0$ et $y = 2\sqrt{2}x$ dans $(O_\gamma, \vec{i}, \vec{j})$. **Voir graphe à la fin.**

(d) Soit $f : (x, y, z) \mapsto y^2 - 2\sqrt{2}xy - z$. Alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 et :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}y \\ 2y - 2\sqrt{2}x \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

donc S est une surface régulière. Et $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$ est un **vecteur normal** au plan tangent à S en M_0 , d'où une équation cartésienne de P_0 :

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}y_0 \\ 2y_0 - 2\sqrt{2}x_0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

On utilise également que $(x_0, y_0, z_0) \in S$ donc $z_0 = (y_0 - 2\sqrt{2}x_0)y_0$.

Finalement une équation cartésienne de P_0 est :

$$P_0 : (-2\sqrt{2}y_0)x + (2y_0 - 2\sqrt{2}x_0)y - z + 2\sqrt{2}x_0y_0 + y_0^2 = 0.$$

(e) On a $P_0 : z = 0$. Posons $f : (x, y) \mapsto y^2 - 2\sqrt{2}xy$.

Alors f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et on peut calculer pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2\sqrt{2}y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2\sqrt{2}x$$

Ainsi $(0, 0)$ est un **point critique** de f . On calcule ensuite pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2\sqrt{2}$$

(f est de classe \mathcal{C}^2 donc on a bien $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ conformément au théorème de Schwarz).

La **matrice hessienne** en $(0, 0)$ est alors $H = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$, puis $\chi_H = (X-4)(X+2)$

d'où $\text{Sp}(H) = \{4, -2\}$.

Ainsi H admet deux valeurs propres de signes opposés donc $(0, 0)$ est un point col de f .

Ainsi S traverse son plan tangent en O .

2. (a)

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, (u^2 - v^2)^2 - (u + v)^4 + 2\sqrt{2}(\sqrt{2}uv)(u + v)^2 = \dots = 0$$

Ainsi $\Sigma \subset S$.

(b) Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $z(u, v) \geq 0$. Or, par exemple, $(1, 1, 1 - 2\sqrt{2}) \in S$ avec $1 - 2\sqrt{2} < 0$.

Donc $\Sigma \neq S$.

3. (a) La surface Σ est de classe \mathcal{C}^1 (fonctions usuelles) et :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}v \\ 2u + 2v \\ 4u^3 - 4uv^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}u \\ 2v + 2u \\ 4v^3 - 4u^2v \end{pmatrix}$$

Or $M(u, v)$ est non régulier si et seulement si $\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v) \right)$ est liée.

Étant donnée l'égalité des deuxièmes coordonnées, éventuellement nulles auquel cas $u = -v$ et la famille est toujours liée, on obtient :

$$\begin{aligned} M(u, v) \text{ non régulier} &\iff \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u, v) = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u, v) \text{ ou } u = -v \\ &\iff \begin{cases} u = v \\ 4u^3 - 4uv^2 = 4v^3 - 4u^2v \end{cases} \text{ ou } u = -v \\ &\iff u = v \text{ ou } u = -v \end{aligned}$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $M(u, u) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}u^2 \\ 4u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M(u, -u) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}u^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On obtient donc la réunion de deux demi-droites de sommet O .

(b) Ce plan est dirigé par les vecteurs $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u, v)$. D'où :

$$P : \begin{vmatrix} x - \sqrt{2}uv & \sqrt{2}v & \sqrt{2}u \\ y - (u+v)^2 & 2u+2v & 2v+2u \\ z - (u^2-v^2)^2 & 4u^3-4uv^2 & 4v^3-4u^2v \end{vmatrix} = 0$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient par exemple, après division par $u^2 - v^2 \neq 0$ puis par $2\sqrt{2}$:

$$P : 2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}uv)(u+v)^2 - 2(y - (u+v)^2)(u^2+v^2) + (z - (u^2-v^2)^2) = 0.$$

Partie II : Une famille de courbes

$$1. \Gamma_a : \begin{cases} x = \sqrt{2}au^2 \\ y = (1+a)^2u^2 \\ z = (1-a^2)^2u^4 \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}_+^*$$

2. a) Γ_a est une courbe de classe \mathcal{C}^1 et :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u) &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}au \\ 2(1+a)^2u \\ 4(1-a^2)^2u^3 \end{pmatrix} \\ \frac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u) &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}a \\ 2(1+a)^2 \\ 12(1-a^2)^2u^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si on suppose que la famille $\left(\frac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u), \frac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u)\right)$ est liée, alors si on considère par exemple les deuxièmes coordonnées (qui sont non nulles), on obtient nécessairement :

$$\frac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u) = u \left(\frac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u) \right).$$

Or ce n'est pas le cas, en regardant les troisièmes coordonnées.

Par conséquent la famille $\left(\frac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u), \frac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u) \right)$ est libre et ces deux vecteurs engendrent donc un plan vectoriel.

- b) Il y a existence de la normale en tout point régulier de Σ . Or $u \neq au$ et $u \neq -au$ car $a \neq 1$, $a \neq -1$ et $u \neq 0$ donc d'après I.3.a il y a bien existence de la normale à Σ en tout point $A_a(u)$.
- c) Cette normale est dirigée par

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, au) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, au) \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}au \\ 2(1+a)u \\ 4(1-a^2)u^3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sqrt{2}u \\ 2(1+a)u \\ 4(a^3-a)u^3 \end{pmatrix} \\ &= u^2 \begin{pmatrix} \sqrt{2}au \\ 2(1+a) \\ 4(1-a^2)u^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2(1+a) \\ 4a(a^2-1)u^2 \end{pmatrix} \\ &= u^2 \begin{pmatrix} 8(1+a)u^2(a^2-1)(a+1) \\ -4\sqrt{2}u^2(a^2-1)(a^2+1) \\ 2\sqrt{2}(1+a)(a-1) \end{pmatrix} \\ &= 2\sqrt{2}u^2(a^2-1) \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}(a+1)^2u^2 \\ -2(a^2+1)u^2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette normale est incluse dans $P_a(u)$ pour tout point de $A_a(u)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \begin{vmatrix} 2\sqrt{2}a & 2\sqrt{2}a & 2\sqrt{2}(a+1)^2u^2 \\ 2(1+a)^2 & 2(1+a)^2 & -2(a^2+1)u^2 \\ 4(1-a^2)^2u^2 & 12(1-a^2)^2u^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \begin{vmatrix} a & a & (a+1)^2u^2 \\ (1+a)^2 & (1+a)^2 & -(a^2+1)u^2 \\ 4(1-a^2)^2u^2 & 12(1-a^2)^2u^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ \forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \begin{vmatrix} 0 & a & (a+1)^2u^2 \\ 0 & (1+a)^2 & -(a^2+1)u^2 \\ (*) & 12(1-a^2)^2u^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

avec $(*) = -8(1-a^2)^2u^2 \neq 0$. Ainsi la condition nécessaire et suffisante devient

$$-a(a^2+1) - (a+1)^4 = 0.$$

On développe et on utilise l'indication de l'énoncé. On a alors $a^2 + a + 1$ non nul pour tout réel a . On calcule pour finir les deux racines de l'équation $a^2 + 4a + 1 = 0$ pour obtenir deux valeurs $\boxed{a_1 = -2 - \sqrt{3} \text{ et } a_2 = -2 + \sqrt{3}}$.

Partie III : Autour de Γ_{-2}

1. (a) Notons \langle , \rangle le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^3 . On a bien $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\| = 1$ et $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0$.

Il suffit donc de poser $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}$.

(b) On a d'après ce qui précède : $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Les deux bases étant orthonormales, Q_2 est orthogonale et q_2 est une isométrie vectorielle.

On a $\det(Q_2) = -1$. Or Q_2 est symétrique donc ${}^tQ_2Q_2 = I_3 = Q_2^2$.

Ainsi q_2 est une symétrie. Par conséquent q_2 est la **réflexion** par rapport au plan $\text{Ker}(q_2 - Id)$.

On calcule donc $\text{Ker}(Q_2 - I_3)$ qui a pour équation $x = \sqrt{2}y$.

(d) Les deux bases étant orthonormales, Q_1 est orthogonale et q_1 est une isométrie vectorielle.

On a $\det(Q_1) = 1$. Donc q_1 est une **rotation** par rapport à l'axe $\Delta = \text{Ker}(q_1 - Id)$.

On calcule $\text{Ker}(Q_1 - I_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ d'où $\Delta = \text{Vect}(\sqrt{2}\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k})$.

Posons $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ puis $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (orthogonal à \vec{I} et normé).

On complète alors en une base orthonormée directe en posant $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a alors $\cos \theta = \langle q_1(\vec{J}), \vec{J} \rangle$ et $\sin \theta = \langle q_1(\vec{J}), \vec{K} \rangle$ (l'axe Δ étant **orienté** par \vec{I}).

On calcule donc $Q_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{cases} \cos \theta = -\frac{2}{3} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$

2. D'après le cours on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Remarque : notation maladroite (confusion possible avec une dérivée).

3. On part de la représentation paramétrique $\Gamma_{-2} : \begin{cases} x = -2\sqrt{2}u^2 \\ y = u^2 \\ z = 9u^4 \end{cases}, u > 0$.

On a alors $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tQ_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ car $Q_1 \in O_3(\mathbb{R})$.

On obtient donc $\begin{cases} X = 9u^4 \\ Y = -3u^2 \\ Z = 0 \end{cases}, u > 0$ ou encore $\begin{cases} X = 9v^2 \\ Y = -3v \\ Z = 0 \end{cases}, v > 0$.

Ainsi Γ_{-2} est une demi-parabole (privée du sommet).

4. On a alors un **problème de Cauchy**. Donc d'après le théorème de Cauchy, il existe une et une seule solution.

5. (a) On calcule $\chi_{B_{-2}} = \begin{vmatrix} X - \frac{4}{5} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{5} & X - \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} & X - 2 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-2)$.

Ainsi $B_{-2} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet **3 valeurs propres distinctes** donc B_{-2} est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On calcule les 3 sous-espaces propres :

$$E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, E_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $P^{-1}B_{-2}P = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- (b) En posant $Y = P^{-1}X$ on obtient $Y' = DY$ qui se résout immédiatement.

ainsi $X = PY = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^t \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Les solutions de S_{-2} sont donc de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\sqrt{2}\beta e^t \\ \sqrt{2}\alpha + \beta e^t \\ \alpha + \gamma e^{2t} \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

- (c) Considérons une solution de S_{-2} et reprenons les notations de la question précédente.

Il faut ici remarquer que : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) + 2\sqrt{2}y(t) = 5\alpha$.

Ainsi cette solution est incluse dans le plan d'équation cartésienne $x + 2\sqrt{2}y = 5\alpha$.

- (d) Attention : comme on peut le vérifier, la représentation paramétrique initiale de Γ_{-2} n'est pas solution du système différentiel !

Néanmoins posons $u = \sqrt{e^t}$ avec $t \in \mathbb{R}$, autrement dit $t = \ln(u^2)$.

Alors une **nouvelle représentation paramétrique** est $\Gamma_{-2} : \begin{cases} x = -2\sqrt{2}e^t \\ y = e^t \\ z = 9e^{2t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Ainsi Γ_{-2} est bien une courbe intégrale de S_{-2} (en prenant $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 9)$).

6. On peut faire compliqué ... ou simple dans cette dernière question !

On a la représentation paramétrique $\Gamma_a : \begin{cases} x = \sqrt{2}a u^2 \\ y = (1+a)^2 u^2 \\ z = (1-a^2)^2 u^4 \end{cases}, u \in \mathbb{R}_+^*$.

Posons alors $u = e^t$ c'est-à-dire $t = \ln(u)$ avec $t \in \mathbb{R}$. Alors $\Gamma_a : \begin{cases} x = \sqrt{2} a e^{2t} \\ y = (1+a)^2 e^{2t} \\ z = (1-a^2)^2 e^{4t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

En posant $B_a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, il est alors immédiat que la courbe Γ_a est une courbe intégrale du système différentiel $X' = B_a X$

