Concours Banque PT 2016
Mathématiques A

Problème d'algèbre linéaire

Partie I

1. La matrice A étant symétrique à coefficients réels, elle est d'après le théorème spectral diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale. Autrement dit, il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de A.
2. • Notons χ_A le polynôme caractéristique de la matrice A. En développant par rapport à la première colonne,

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)\left[(X-2)^2-1\right]-(X-2)$$
$$= (X-2)\left[(X-2)^2-\sqrt{2}^2\right] = (X-2)(X-2-\sqrt{2})(X-2+\sqrt{2})$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}\}$.

• Recherchons maintenant une base orthonormale de vecteurs propres de A.

Posons pour cela $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et résolvons l'équation $AX = \lambda X$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

$AX = 2X \iff y = 0$ et $x+z = 0 \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $AX = (2-\sqrt{2})X \iff y = \sqrt{2}x$ et $x = z \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Posons alors $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $u_2 = \frac{1}{2}(1,\sqrt{2},1)$ et enfin $u_3 = u_1 \wedge u_2 = \frac{1}{2}(1,-\sqrt{2},1)$.
Par orthogonalité des sous-espaces propres, $\mathfrak{B}' = (u_1,u_2,u_3)$ est une base orthonormale de vecteurs propres.

3. 0 n'étant pas valeur propre de A, la matrice A est inversible.
4. On a $u' = P^{-1}u$ avec P la matrice de passage de la base $\mathfrak{B}$ à la base $\mathfrak{B}'$. Mais comme celle-ci est orthogonale,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

5. Comme $u = Pu'$, en posant $D = \mathrm{diag}(2, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, on trouve :

$$\langle Au, u\rangle = u^T Au = 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz$$
$$= u'^T P^T A P u' = u'^T D u' = 2x'^2 + (2-\sqrt{2})y'^2 + (2+\sqrt{2})z'^2$$

6. Posons $\lambda = 2-\sqrt{2}$. D'après la question précédente,

$$\langle Au, u\rangle = 2x'^2 + (2-\sqrt{2})y'^2 + (2+\sqrt{2})z'^2 \geqslant \lambda(x'^2+y'^2+z'^2) = \lambda||u'||^2 = \lambda||u||^2$$

car $u = Pu'$ et une matrice de passage orthogonale conserve la norme.

7. Pour conclure, montrons que l'application $(\cdot,\cdot)_A$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
   • Tout d'abord, l'application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   • Elle est symétrique car pour tous $u, v \in \mathbb{R}^3$,

$$(u,v)_A = v^T Au = \left(v^T Au\right)^T = u^T A^T v = u^T Av = (v,u)_A$$

   • Elle est clairement bilinéaire car pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha u + v, w)_A = w^T A(\alpha u + v) = \alpha w^T Au + w^T Av = \alpha(u,w)_A + (v,w)_A$$

La linéarité à droite découlant de la linéarité à gauche par symétrie.

- Elle est enfin définie positive car pour tout $u \in \mathbb{R}^3$,

$$(u,u)_A = \langle Au, u\rangle \geqslant \lambda ||u||^2 \geqslant 0 \quad \text{ et } \quad (u,u)_A = 0 \Longrightarrow \lambda ||u||^2 = 0 \Longrightarrow u = 0$$

$(\cdot,\cdot)_A$ définit donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Partie II

1. J_b est une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. De plus, $J_b(0) = 0$.
2. J_b est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonction polynomiale.
   En posant $b = (b_1, b_2, b_3)$, on a $J_b(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - b_1 x - b_2 y - b_3 z$. Donc,

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{\text{grad}}(J_b)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - y - b_1 \\ 2y - x - z - b_2 \\ 2z - y - b_3 \end{pmatrix} = Au - b$$

   La hessienne de J_b est :

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 J_b}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 J_b}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 J_b}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 J_b}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 J_b}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 J_b}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 J_b}{\partial x \partial z} & \dfrac{\partial^2 J_b}{\partial y \partial z} & \dfrac{\partial^2 J_b}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

   REMARQUE : *La hessienne d'une fonction de 3 variables n'est pas au programme.*
3. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle u, b\rangle| \leqslant ||b|| \cdot ||u||$, donc :

$$J_b(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle u, b\rangle \geqslant \frac{\lambda}{2}||u||^2 - ||b|| \cdot ||u||$$

4. - Soit $\varphi : t \mapsto \dfrac{\lambda}{2} t^2 - \alpha t$ avec $\alpha = ||b||$. On a d'après ce qui précède $J_b(u) \geqslant \varphi(||u||)$.
   - La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On obtient facilement les variations de φ (α étant positif et λ strictement positif).

t	0		α/λ		$2\alpha/\lambda$		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0		$+$		
$\varphi(t)$	0	$\searrow$	$-\alpha^2/2\lambda$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   La fonction φ est donc minorée mais pas majorée. Par comparaison, $J_b(u)$ est minorée et n'est pas majorée.
5. La borne inférieure existe car l'ensemble $\{J_b(u), u \in \mathbb{R}^3\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.
   De plus, $J_b(0) = 0$ donc $\inf\limits_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) \leqslant 0$.
6. Si $||u|| \geqslant \dfrac{2||b||}{\lambda}$, $\varphi(u) \geqslant 0$ d'après le tableau de variations. On en déduit directement que $J_b(u) \geqslant 0$.
7. D'après la question 5, la borne inférieure est négative ; d'après la question 6, $J_b(u) \geqslant 0$ dès que $||u|| \geqslant 2||b||/\lambda$.
   Ainsi, $\inf\limits_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf\limits_{u \in \overline{B}(0,r)} J_b(u)$ avec $r = 2||b||/\lambda$.
8. La fonction J_b étant continue sur le fermé borné $\overline{B}(0,r)$, elle est bornée et atteint ses bornes. Bref,

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf_{u \in \overline{B}(0,r)} J_b(u) = \min_{u \in \overline{B}(0,r)} J_b(u)$$

9. Le minimum en question est atteint en un point critique de l'ouvert $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire là où le gradient s'annule.
   D'après les calculs précédents, $\overrightarrow{\text{grad}}(J_b)(u) = 0$ si et seulement si $Au - b = 0$. Comme A est inversible, cela revient à avoir $u = A^{-1}b$. La fonction J_b admet donc un seul minimum local (donc global), et ce, au point $u = A^{-1}b$. Il a pour valeur $J_b(A^{-1}b) = -1/2 \langle A^{-1}b, b\rangle$ (qui est bien négatif).

Partie III

1. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
   a) On peut, comme dans la question **I]1**, appliqué le théorème spectral.
   b) La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ étant orthonormale, d'après le théorème de Pythagore,
   $$||u||^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 ||e_i||^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$
   De plus, par bilinéarité du produit scalaire,
   $$\langle Au, u\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \alpha_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \alpha_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$$
   c) Ce qui nous conduit à écrire,
   $$\langle Au, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \alpha_i^2 = \lambda_1 ||u||^2$$
   d) Comme λ_1 est supposé strictement positif, en supposant u non nul, on a dès lors $\langle Au, u\rangle > 0$.
2. Supposons la famille $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ constituée de vecteur deux à deux A-conjugués.
   - Montrons que la famille $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ est libre.
     Supposons pour cela qu'il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v_i = 0$. En multipliant chaque membre de l'égalité à gauche par $v_j^T A$ pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient :
     $$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v_j^T A v_i = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \langle Av_i, v_j\rangle = \alpha_j \langle Av_j, v_j\rangle = 0$$
     Comme on a démontré que $\langle Av_j, v_j\rangle \neq 0$ (les v_j sont non nuls), on en déduit que tous les α_j sont nuls !
   - Cette famille libre comporte n vecteurs, ce qui est exactement la dimension de $\mathbb{R}^n$. On a bien une base de $\mathbb{R}^n$.
3. On a $(\alpha M + \beta N)^T = \alpha M^T + \beta N^T$ et $(MN)^T = N^T M^T$.
4. Avec les notations de l'énoncé, $v^T v$ est un scalaire et vv^T est une matrice carrée d'ordre n.
5. Là encore, en utilisant les notations de l'énoncé, $v^T Bu$ étant une matrice de taille 1,
   $$\langle Bu, v\rangle = v^T Bu = (v^T Bu)^T = u^T B^T v = \langle u, B^T v\rangle$$
6. a) La matrice C_k est symétrique car par linéarité, $C_k^T = \left[\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_i v_i^T}{\langle Av_i, v_i\rangle}\right]^T = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(v_i v_i^T)^T}{\langle Av_i, v_i\rangle} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_i v_i^T}{\langle Av_i, v_i\rangle} = C_k$.
   b) $C_k A w = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_i v_i^T A w}{\langle Av_i, v_i\rangle} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_i \langle A^T v_i, w\rangle}{\langle Av_i, v_i\rangle} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle Av_i, w\rangle}{\langle Av_i, v_i\rangle} v_i$ par symétrie de A.
   c) Ainsi, pour $w = v_j$, on trouve $C_k A v_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle Av_i, v_j\rangle}{\langle Av_i, v_i\rangle} v_i = \frac{\langle Av_j, v_j\rangle}{\langle Av_j, v_j\rangle} v_j = v_j$ car les v_i sont A-conjugués.
   d) On a immédiatement $D_k v_j = v_j - C_k A v_j = 0$. De plus, $D_k^T A v_j = (I_n - C_k A)^T A v_j = Av_j - AC_k A v_j = 0$.
   e) $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et on vient de montrer que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $D_n v_j = 0$.
   On en déduit que la matrice D_n est nulle. Cela implique que $I_n - C_n A = 0$, autrement dit que C_n est l'inverse de A.

Exercice de probabilités

1. N correspond au nombre de lancers nécessaires pour obtenir un premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes. N suit donc une loi géométrique de paramètre p. On a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N = n) = pq^{n-1}$ où l'on a posé $q = 1 - p$.
   On compte ensuite le nombre de succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,
   $$\mathbb{P}(X = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

2. Soit $(k,n) \in X(\Omega) \times N(\Omega)$.

$$\mathbb{P}(X=k,N=n) = \mathbb{P}(X=k|N=n) \times \mathbb{P}(N=n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} pq^{n-1} = \binom{n}{k} p^{k+1} q^{2n-k-1}$$

où, par convention, $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

3. Rappelons que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et on montre facilement par récurrence que :

$$\forall x \in]-1,1[\quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

Par ailleurs, en dérivant terme à terme la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence,

$$\forall x \in]-1,1[\quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$$

En divisant chaque membre de l'égalité par $k!$, on trouve alors :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

4. La dernière question nous permet de retrouver la loi marginale de X.
D'après la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événements $(N=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k,N=n)$$

- Commençons par traiter le cas où $k=0$.

$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} pq^{2n+1} = pq \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

- Supposons maintenant $k > 0$.

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k,N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1} q^{2n-k-1} = p^{k+1} q^{k-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{2(n-k)} = \frac{p^{k+1} q^{k-1}}{(1-q^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$$

5. Soient $U \hookrightarrow \mathscr{B}(\lambda)$ et $V \hookrightarrow \mathscr{G}(\lambda)$ indépendantes.
   a) Comme U et V sont indépendantes, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) = \lambda/\lambda = 1$.
   b) Comme ((U=0),(U=1)) est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(UV=k) = \mathbb{P}(UV=k|U=0)\mathbb{P}(U=0) + \mathbb{P}(UV=k|U=1)\mathbb{P}(U=1)$$

   Ainsi, $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(UV=k|U=0)\mathbb{P}(U=0) = \mathbb{P}(U=0) = 1-\lambda$ car $\mathbb{P}(V=0)=0$.
   Par ailleurs, pour $k \neq 0$, $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(V=k|U=1)\mathbb{P}(U=1) = \lambda^2(1-\lambda)^{k-1}$ car $\mathbb{P}(UV=k|U=0)=0$.
   c) D'après la formule de Kœnig-Huygens, $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E}(Y^2) - 1$. Par ailleurs, U^2 et V^2 sont indépendantes donc,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(U^2V^2) - 1 = \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2) - 1 = (\mathbb{V}(U) + \mathbb{E}(U)^2)(\mathbb{V}(V) + \mathbb{E}(V)^2) - 1 \\ &= \left(\lambda(1-\lambda) + \lambda^2\right)\left(\frac{1-\lambda}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) - 1 = 2 \times \frac{1-\lambda}{\lambda}\end{aligned}$$

6. $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Il suffit ensuite de prendre $\lambda = \dfrac{1}{2-p}$ pour constater que X a même loi que Y.

FIN DE L'ÉPREUVE