Exercices : Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I,\ f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 3 (Petites mines)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1) Montrer que l'équation $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$ possède au moins une solution.

2) Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ possède au moins une solution.

Exercice 4

1) Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arctan}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$, $\operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}\operatorname{signe}(x) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, il existe des suites (A_n), (B_n) et (θ_n) telles que

$$\operatorname{Arctan}(x) = A_n + B_n \operatorname{Arctan}(\theta_n) \qquad \text{avec } |B_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

4) En déduire un algorithme de calcul de $\operatorname{Arctan}(x)$ à ε près.

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x + 2x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$.

Étudier la dérivabilité de f, la continuité de f'.

Exercice 6
Domaine de définition et dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(t) = \operatorname{Arcsin}(2t\sqrt{1-t^2})$ **2)** $f(t) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)$ **3)** $f(t) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2t^2}\right)$

Exercice 7
Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ une fonction paire de classe $\mathscr{C}^n$.
Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots n\}$, $f^{(k)}$ a la parité de k.

Exercice 8 (D'après Cachan PT, 2013)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$.

1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer f' sur $\mathbb{R}^*$, en déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) On se place sur $]0,+\infty[$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$, la dérivée n-ième de f, est de la forme $P_n(1/x)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, où P_n est un polynôme. (sans hypothèse sur $\deg P_n$).

3) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4) Des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support dans un segment.

- **a)** Soit $[a,b]$ un segment. Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que g est nulle hors de $]a,b[$, $g > 0$ sur $]a,b[$.
- **b)** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut trouver g vérifiant les hypothèses précédentes et de plus $g = 1$ sur $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Indication : *Penser aux primitives.*

5) Le but de cette question est de trouver des fonctions qui admettent un DL mais ne sont pas $\mathscr{C}^1$.

- **a)** Montrer que $f(x) = o(x^n)$ en $x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Construire une fonction g qui admet un DL en 0 à l'ordre n pour tout n et qui n'est pas $\mathscr{C}^1$.
Indication : *On pourra s'inspirer de la fonction de l'exercice 5.*

Exercice 9 (Développements limités)
Donner le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1) $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ **2)** $(1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$ **3)** $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ **4)** $e^{\operatorname{sh} x} - \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

Donner le DL à l'ordre indiqué et au point indiqué des fonctions suivantes :

5) $(x^3+x)^{1/3} - (x^3-x)^{1/3}$ ordre 4 en $+\infty$ **6)** $\ln(2\sin x)$ ordre 3 en $\dfrac{\pi}{6}$

Exercice 10 (Limites)
Donner la limite en 0^+ de $\dfrac{x^{(x^x)}\ln x}{x^x-1}$