

Exercice 1 (cours)

Il faut connaître parfaitement la nature des séries de terme général u_n suivants :

- 1) $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ 2) $u_n = q^n$ selon les valeurs de $q \in \mathbb{C}$.

Exercice 2

Déterminer la nature des séries de terme général u_n suivants.

- 1) $u_n = \frac{2^n + 11}{3^n + 5}$, 2) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, 3) $u_n = n^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^3}\right)$, 4) $u_n = (-1)^n n^3$,
 5) $u_n = (-1)^n e^{-\sqrt{n}}$, 6) $u_n = \frac{(n+1)^4}{n! + 1}$, 7) $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq 1$

Exercice 3

Soit f , une fonction positive, décroissante et continue sur $[1, +\infty[$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F(n) = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt$$

- 1) Montrer que la suite $(F(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que la suite $(F(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
 2) Application : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

En déduire un développement asymptotique de la série harmonique $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Remarque. La limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la constante d'Euler $\gamma \approx 0,57721566$.

Exercice 4 (Séries alternées)

Dans cet exercice, on montre qu'il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes,

i.e. telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$ existe et $\in \mathbb{R}$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n |u_k| \notin \mathbb{R}$.

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $u_n = (-1)^n a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On suppose de plus que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geq 0 \quad , \quad (a_n) \text{ est décroissante} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

- 1) Montrer que (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont des suites adjacentes. Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n .
 2) Trouver un exemple de série convergente mais non absolument convergente.

Exercice 5

- 1) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente et $u_n \geq 0$, alors la série de terme général u_n^2 est convergente.
 2) Ce résultat demeure-t-il vrai si les réels u_n ne sont plus supposés positifs? Indication : On pourra rechercher un contre-exemple sous la forme d'une série alternée.
 3) On suppose que $u_n > -1$ et que les séries de terme général u_n et u_n^2 convergent. Étudier la série de terme général $\ln(1 + u_n)$.