Exercice 1
Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = x^2.$$

1) Étudier la parité de f. Tracer f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2) Développer la fonction f en série de Fourier.

3) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad , \qquad \Sigma_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 2 (E3A PC 2007)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, et f, la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = \operatorname{ch}(\alpha x).$$

1) Développer la fonction f en série de Fourier.

2) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}, \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}.$$

Exercice 3
Soit f la fonction 2-périodique impaire définie par

$$\forall x \in [0, 1], \qquad f(x) = x(1 - x).$$

1) Tracer f sur $[-1, 1]$.

2) Développer la fonction f en série de Fourier.

3) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\Sigma_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \qquad , \qquad \Sigma_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$$

Exercice 4
Soit $\theta \in]0, \pi[$. Soit f la fonction 2π-périodique paire donnée par

$$\begin{cases} f(x) &= 1 \quad \text{si } x \in [0, \theta] \\ f(x) &= 0 \quad \text{si } x \in]\theta, \pi] \end{cases}$$

1) Tracer f sur $[-\pi, \pi]$.

2) Développer la fonction f en série de Fourier.

3) Étudier la convergence de la série de Fourier.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ pour $\theta \in]0, \pi[$, puis pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$.

Exercice 5
Montrer qu'il n'existe pas de fonction 2π-périodique continue par morceaux telle que sa série de Fourier soit $\displaystyle\sum \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$.

Exercice 6
Soit f la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \qquad f(x) = e^{-x}.$$

1) Calculer les coefficients de Fourier complexes [1] et de la fonction f.

2) En déduire que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

Exercice 7
Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Déterminer les coefficients de Fourier de f en fonction de ceux de f'.

2) On suppose que plus $a_0(f) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x$.

Exercice 8

1) Décomposer en éléments simple la fraction rationnelle $\dfrac{1}{5+2(X+\frac{1}{X})}$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{5+4\cos x}$. À l'aide d'une série entière, développer f en série de Fourier. <u>Indication</u> : *Écrire* $\cos x$ *avec des exponentielles, et utiliser 1).*

3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9
Déterminer, pour $a > 0$, le développement en série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,(a) - \cos(x)}$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{\mathrm{ch}\,(a) - \cos x}\,\mathrm{d}x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}\,\mathrm{d}x$ et $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$