Exercice 1 (OT 2009 — Télécom SudParis, 269)

1) Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - 2f + 2 = 0$$

sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, en utilisant le changement de variables $u = xy$ $v = \dfrac{y}{x}$.

2) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base du $\mathbb{R}$-espace E.

À quelles conditions sur $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, la famille $(e_1 + x, \dots, e_n + x)$ est-elle libre ?

Exercice 2 (OT 2009 — ENSAM, 267)

1) Trouver les extrema locaux de $f(x, y) = (2 + \cos x)(2 + \cos y)$.

2) Maple : montrer que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_8[X]$ et trouver une base orthogonale de $\mathbb{R}_5[X]$ pour ce produit scalaire.
Trouver le projeté orthogonal de X^8 sur $\mathbb{R}_5[X]$. Déterminer la distance de X^8 à $\mathbb{R}_5[X]$.

Exercice 3 (2011, Centrale TSI — OT 263)

Étudier et tracer la courbe $\begin{cases} x(t) &= \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) &= \cos t \sin t \end{cases}$.
Calculer la longueur de la courbe entre les deux points de rebroussement.

Exercice 4 (OT 2009 — ENSAIT, 270) $\begin{cases} x &= \displaystyle\int_1^t \frac{u^2-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ y &= \displaystyle\int_1^t \frac{u^2-1}{u^3+1}\,\mathrm{d}u \end{cases}$

1) Étude en $t = 1$ de la courbe d'équation

2) Donner la limite ℓ de la suite $u_n = (n \sin \dfrac{1}{n})^n$ et la nature de la série de terme général $u_n - \ell$.

Exercice 5 (OT 2009 — petites mines, 273) $\begin{cases} x &= \dfrac{\sin^2(t)}{2 + \sin t} \\ y &= \cos t \end{cases}$

Étudier et tracer la courbe paramétrée d'équations
Donner l'aire de la partie du plan limitée par la courbe.

Exercice 6 (OT 2009 — petites mines, 275)

1) Cours : définir une matrice orthogonale. Développement limité à l'ordre de 7 en 0 de $\dfrac{1}{1-x^2}$.

2) Ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2 + x^2)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Déterminer, suivant les valeurs de m, la nature de la quadrique d'équation $x^2 + y^2 - z^2 - 8z(x + 2y) + x + 2y - 2z = m$.

Exercice 7 (2011, TSI — OT 268) $\begin{cases} x &= t \\ y &= t\cos\theta \\ z &= a\sin\theta \end{cases}$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Soit Σ la surface d'équation et Σ' la surface d'équation $a^2(x^2 - y^2) = x^2 z^2$.

1) Montrer que $\Sigma \subset \Sigma'$. Y a-t-il égalité ? On pourra considérer les points $A(0, 0, \alpha)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer les points singuliers de Σ et de Σ' (i.e. de deux façons).

3) Nature des courbes $\Sigma \cap (z = z_0)$ et $\Sigma \cap (x = x_0)$.

Exercice 8 (OT 2009 — petites mines, 278)

1) Déterminer la surface $\mathscr{S}$ constituée des points équidistants aux droites $\mathscr{D}$: $(x = 0, y = 0)$ et $\mathscr{D}'$: $(z = 0, x + y = a)$.

2) Existence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)}$. Calcul exact de la somme.