Exercices : Réduction

Exercice 1
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres (on vérifiera ses calculs à l'aide de la trace) et les sous-espaces propres de f.

2) Donner une base $\mathscr{B}'$ de vecteurs propres, la matrice D de f dans cette base, et la matrice de changement de base P. Donner la formule liant M, P et D.

3) Déterminer la matrice de f^k dans la base $\mathscr{B}'$ puis dans la base canonique.

Exercice 2
Montrer que $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable : Calculer le polynôme caractéristique et donner une matrice diagonale semblable à M *sans calculer les sous-espaces propres.*

Exercice 3
Calculer le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres
des matrices suivantes et diagonaliser, lorsque c'est possible, ces matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}), \quad B_5 = aA_5^2 + bA_5 + cI_3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (PT 2008, B partie I)
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A_φ. Déterminer les valeurs propres de cette matrice. Quelle est la dimension des sous-espaces propres ? À quelle matrice diagonale est-elle semblable ?

2) Déterminer une base (c_1, c_2, c_3) de vecteurs propres de φ.

3) On pose $D_1 = \text{Vect}\,(c_1)$. Montrer que D_1 est stable par φ.

4) On pose $P_1 = \text{Vect}\,(c_2, c_3)$. Montrer que P_1 est stable par φ.

Exercice 5 (PT 2007, A partie C)
On définit l'application Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$$

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, déterminer $\Phi(X^k)$. En déduire Ker Φ.

3) Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer la trace de Φ.

4) Quelles sont les valeurs propres de Φ ? L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 6 (OT 149 — 2011)
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et f définie sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ par $f(P)(X) = (X-a)(X-b)P'(X) - (2nX - n(a+b) + c)P(X)$. Montrer que f est un endomorphisme, dont on déterminera les éléments propres (vecteurs propres et valeurs propres).

Exercice 7 (PT 2012, A partie I)
Soit $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f et g commutent.

2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espace propre de f et g.
Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? trigonalisables ?

3) On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. En utilisant l'exercice 5)b) de la feuille « Algèbre Linéaire », déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace $\operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ soit stable par f et par g.

4) Construire une base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de trigonalisation commune à f et g.

Plus généralement, si f et g commutent et sont diagonalisables (resp trigonalisables), alors ils sont diagonalisables dans une même base. C'est une conséquence de l'exercice 4 de la feuille d'algèbre linéaire, où l'on a montré que $f \circ g = g \circ f \Longrightarrow g(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$.

Exercice 8
La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

1) Diagonaliser A, donner la matrice de passage et son inverse.

2) Déterminer toutes les matrices M' telles que $M'^2 = D$, où D est la matrice diagonale obtenue en 1.

3) En déduire toutes les matrices M telles que $M^2 = A$.

Exercice 9
Montrer qu'une somme (puis un produit) de matrices diagonalisables n'est pas forcément diagonalisable. On pourra chercher des matrices 2×2 triangulaires.

Exercice 10
Montrer que M et ${}^tM$ ont mêmes valeurs propres.

Exercice 11
Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ admette 2 pour valeur propre.

Exercice 12
Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 13
Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 14
Soit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = {}^tM$. Valeurs propres, sous-espaces propres (Indication : *calculer* φ^2). L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Trace de φ. Quelle est la nature géométrique de φ ?

Exercice 15
Soient $E = \ell^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites réelles bornées et $\Delta : E \to E$ l'endomorphisme défini par

$$\Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

Déterminer les valeurs propres de Δ.

Exercice 16
Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions ayant une limite nulle en $\pm\infty$.
Soit u définie sur E par $u(f)(x) = f(2x)$.
Montrer que u est un endomorphisme, puis que u n'a pas de valeurs propres.
Indication : *si* $u(f) = \lambda f$, *regarder* $u^n(f)(x)$.

Exercice 17
Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions ayant une limite finie en $+\infty$. Soit T définie sur E par $T(f)(x) = f(x+1)$.
Montrer que T est un endomorphisme, puis trouver les valeurs propres de T.

Exercice 18 (inspiré de ATS 2010)
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2) On note e'_1 un vecteur propre pour la plus grande des deux valeurs propres, et e'_2 un vecteur propre pour l'autre valeur propre. Vérifier que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e_3)$ est une base de E. Donner la matrice T de l'application f dans la base $\mathscr{B}'$,

3) Calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer T^{-1}, puis T^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

4) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 19
Soit S le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & 2x_n & - & y_n & + & z_n \\ y_{n+1} & = & & & y_n & + & z_n \\ z_{n+1} & = & -x_n & + & y_n & + & z_n \end{array}\right.$ avec $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ fixés

1) Écrire le système sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$. Exprimer X_n en fonction de A, de X_0 et de n.

2) À l'aide des résultats de l'exercice 18, exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et de n.

Exercice 20
Soit $\mathscr{E}$ le système d'équations différentielles

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 2x & - & y & + & z \\ y' & = & & & y & + & z \\ z' & = & -x & + & y & + & z \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rcr} x(0) & = & -1 \\ y(0) & = & 2 \\ z(0) & = & 0 \end{array}$$

1) Écrire le système sous forme matricielle $X' = AX$ et, à l'aide des résultats de l'exercice 18 réduire A.

2) Dans la nouvelle base, résoudre le système d'équations différentielles $X'_1 = TX_1$.

3) En déduire les solutions X de $\mathscr{E}$ à l'aide de la matrice de passage.

4) Même exercice avec le système $X' = AX + B(t)$ où $B(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$.

Exercice 21
Réduire les matrices de l'exercice 3 non diagonalisables, en complétant les familles libres de vecteurs propres obtenues en des bases de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22 (suites récurrentes linéaires)
Le but de cet exercice est de prouver le théorème du cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Soit $(a_1, a_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a_0 \neq 0$. On cherche à décrire l'ensemble $\mathscr{S}$ des suites (u_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1}$$

1) Écrire un système $X_{n+1} = AX_n$, où la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dépend de a_1 et a_0, X_n de u_n et u_{n+1}.

2) Étude de A : Déterminer le polynôme caractéristique de A. Est-ce que A peut-être diagonalisable avec une seule valeur propre ? Décrire les trois situations possibles, en donnant un critère.

3) Cas $\Delta > 0$: en posant $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ la matrice de passage, montrer que

$$u_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$$

où C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$ dépendent des conditions initiales (u_0, u_1).

4) Cas $\Delta < 0$: En se plaçant dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, montrer que

$$u_n = C_1 \lambda^n + C_2 \overline{\lambda}^n$$

où C_1 et $C_2 \in \mathbb{C}$ dépendent des conditions initiales (u_0, u_1), et $\lambda = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.
Puis, en utilisant le fait que $u_n \in \mathbb{R}$, donc $\Re(u_n) = u_n$, retrouvez la formule du théorème.

5) Cas $\Delta = 0$. On admet que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Retrouvez la formule du théorème.

Exercice 23
Déterminer l'ensemble des suites récurrentes vérifiant

1) $u_{n+3} = -6u_n + 5u_{n+1} + 2u_{n+2}$

2) $u_{n+3} = -u_n - 3u_{n+1} - 3u_{n+2}$ (cf. ex 13)